

Министерство образования и науки Российской Федерации

Федеральное государственное бюджетное
образовательное учреждение высшего образования
Санкт-Петербургский государственный технологический институт
(технический университет)

Кафедра общей физики

Осташев В.Б.

Часть VI
Колебания и волны –
общая теория

Конспект лекций

Санкт-Петербург

2023

УДК _____

[Осташев В.Б.](#) «Часть VI. Колебания и волны – общая теория»: Конспект лекций. СПбГТИ(ТУ). СПб, 2023,– 133 с.



В лекциях рассмотрены ...,

...
...
...
...
...
...
...
...

Лекции соответствуют следующим компетенциям подготовки специалистов всех направлений: ОК-1, ОК-3, ОК-6, ПК-3, ПК-4, ПК-10.

Рис. __, табл. __, библиогр. 4 назв.

Рецензент:

...

Утверждено на заседании методического Совета _____ факультета СПбГТИ(ТУ).

Протокол № __, «__»._____.20__ г.

Часть VI. Колебания и волны – общая теория

СОДЕРЖАНИЕ

ОПРЕДЕЛЕНИЯ.....	5
1. Колебания.....	6
1.1. Гармонические колебания.....	6
1.2. Гармонические незатухающие колебания.....	7
1.3. Затухающие гармонические колебания.....	12
1.4. Параметры колебательной системы.....	14
1.5. Вынужденные колебания.....	16
1.6. Электрические колебания.....	18
2.6.1 Свободные незатухающие колебания.....	20
2.6.2 Свободные затухающие колебания.....	21
2.6.3 Вынужденные колебания.....	22
1.7. Система с минимумом потенциальной энергии.....	24
1.8. Представления гармонических колебаний.....	26
1.8.1. Представление в виде векторной диаграммы.....	26
1.8.2. Комплексное представление.....	27
1.9. Сложение колебаний.....	29
1.9.1. Скалярное сложение.....	29
1.9.2. Векторное сложение.....	31
2. Волны – общая теория.....	33
2.1. Волна, её уравнение и параметры.....	33
2.1.1. Вводные определения.....	33
2.1.2. Дифференциальное уравнение волн.....	39
2.2. Параметры волны – скорость и длина.....	41
2.2.1. Монохроматическая волна.....	41
2.2.2. Полихромная волна.....	46
2.3. Групповая скорость – вывод формулы.....	60
2.4. Специфичные для волн процессы и явления.....	63
2.4.1. Интерференция.....	63
2.4.2. Дифракция.....	67
2.4.3. Поляризация.....	68
2.4.4. Дисперсия.....	68
2.5. Стоячие волны.....	69
2.5.1. Уравнение стоячей волны.....	69
2.5.2. Пучности и узлы.....	70
2.5.3. Резонанс стоячих волн.....	74
3. Волны различной природы и их свойства.....	76
3.1. Электромагнитная волна.....	76
3.1.1. Уравнение электромагнитной волны.....	76
3.1.2. Энергия электромагнитной волны. Вектора Умова и Пойнтенга.....	81
2.6.4 Циклическая частота и волновой вектор, как 4-вектор пространства Минковского.....	84
3.2. Виды механических волн.....	86
3.3. Волны в упругой среде.....	89
3.3.1. Уравнение упругой волны.....	89
3.3.2. Энергия упругой волны.....	95
3.4. Волны в жидкости и газе.....	98
3.4.1. Уравнение звуковой волны.....	98
3.4.2. Энергия звуковой волны.....	104
3.4.3. Звуковое давление и интенсивность звука.....	107
3.4.4. Психофизические характеристики звука.....	108
3.5. Другие виды волн.....	117
3.5.1. Гравитационные волны.....	117

3.5.2. Волны де Бройля.....	127
4. Эффект Доплера	129
4.1. Эффект Доплера для звуковых волн.....	129
4.2. Эффект Доплера для электромагнитной волны.....	131
Приложение.....	135
Литература	143

ОПРЕДЕЛЕНИЯ

Df 1. Колебания (в узком смысле) – движение, процесс, характеризующийся той или иной степенью повторяемости, называется колебательным.

Df 2. Колебания (в широком смысле) – финитный, ограниченный процесс движения называется колебательным.

Df 3. Волна (в узком смысле) – процесс распространения колебаний в пространстве с течением времени.

Df 4. Волна (в широком смысле) – процесс распространения возмущений в пространстве с течением времени.

Замечание 1: В случае, если определение колебаний принимается в широком смысле, оба определения волны совпадают.

Замечание 2: Вообще говоря, существует определение волны, где под волной понимается любая функция пространственно-временных координат (*пространственных координат и времени*) – произвольное распределения возмущений в пространстве с течением времени, а не обязательно их распространение. Дело в том, что под это определение так же подпадают и стоячие волны (*см. ниже*), которые, вроде бы, не подпадают под определение волны «в широком смысле». Однако мы будем вводить понятие стоячей волны, к суперпозиции двух бегущих волн. В любом случае, для возникновения стоячей волны, в данное место пространства должна прийти бегущая волна и протечь некие процессы (*её интерференция, в частности*), чтобы получить бегущую волну.

Замечание 3: В первую очередь мы обращаем внимание на то, что волна – это процесс.

Пример процесса или движения, попадающего под определения колебаний в широком смысле и не попадающего в узком – «**Апериодические процессы**».

$$\omega^2 = \omega_0^2 - \beta^2 \quad \text{циклическая частота для затухающих колебаний.}$$

ω – циклическая частота,

ω_0 – собственная циклическая частота,

β – коэффициент затухания.

$$\nu = \frac{\omega}{2\pi} \quad \text{частота колебаний,}$$

$$T = \frac{2\pi}{\omega} \quad \text{период колебаний.}$$

$$\text{Если } \omega_0 = \beta \Rightarrow \omega = 0, \nu = 0, T = \infty.$$

Периодичность полностью отсутствует.

Замечание: апериодические процессы являются предельным случаем колебательных процессов и описываются теми же дифференциальными уравнениями. Поэтому удобно присоединять эти процессы к колебательным, что позволяет сделать определение колебаний в широком смысле.

Df 5. Гармонические колебания (интегральное определение) – колебания по закону синуса или косинуса:

$$x = A \cos(\omega t + \varphi_0)$$

Df 6. Монохроматическая волна – это волна, представляющая из себя бесконечный синус или косинус. Является процессом распространения гармонических колебаний.

$$\xi = \xi_0 \cos(\omega t - kx + \varphi_0)$$

Замечание:

1. Любое произвольное колебание (в широком смысле) всегда можно представить как сумму (возможно ∞) гармонических колебаний.
2. Любую произвольную волну всегда можно представить как сумму (возможно ∞) монохроматических волн. Это следует из теоремы Фурье (о разложении функции в ряд синуса и косинуса). **Физический пример:** разложение света в спектр.

Вывод: мы будем рассматривать только гармонические колебания и монохроматические волны, имея в виду, что в случае необходимости произвольные колебания или волну мы сможем представить как их сумму.

1. Колебания

1.1. Гармонические колебания.

Гармонические колебания (интегральное определение) – колебания по закону синуса и косинуса.

$$x = A \cos(\underbrace{\omega t + \varphi_0}_{\varphi}) \quad (1.1)$$

x – колеблющаяся величина (координата)

A – амплитуда (максимальное отклонение от равновесия). Может зависеть от времени.

ω – циклическая частота

$$\omega = 2\pi\nu = \frac{2\pi}{T} \quad (1.2)$$

ν – частота колебаний (количество колебаний в единицу времени).

$$\nu = \frac{1}{T} \quad (1.3)$$

T – период колебаний (минимальное время, через которое система возвращается в исходное состояние)/

$\varphi = \omega t + \varphi_0$ – фаза.

φ_0 – начальная фаза.

Замечание: гармонические колебания могут быть представлены вращением вектора с постоянной угловой скоростью. Тогда сами колебания будут задаваться проекцией этого вектора на одну из осей. В этом случае ω – есть угловая скорость вращения этого вектора.

$$\varphi = \omega t + \varphi_0 \quad (1.4)$$

– фаза колебаний (для вектора – угол поворота)

Гармонические колебания (дифференциальное определение) – движение под действием возвратной силы.

Возвратной (восстанавливающей, квазиупругой) называется сила, которая описывается законом $F = -kx$ (закон, аналогичный закону Гука).

Замечание: ниже покажем, что возвратной (квазиупругой) силой будет любая сила вблизи минимума своей потенциальной энергии.

1.2. Гармонические незатухающие колебания

Пусть:

$$A = A_0 = const,$$

$$\omega = \omega_0$$

– собственная циклическая частота.

Тогда

$$x = A_0 \cos(\omega_0 t + \varphi_0) \quad (1.5)$$

$$v = \frac{dx}{dt} = x' = -A_0 \omega_0 \sin(\omega_0 t + \varphi_0) \quad (1.6)$$

$$a = \frac{dv}{dt} = x'' = -A_0 \omega_0^2 \cos(\omega_0 t + \varphi_0) \quad (1.7)$$

$$T = E_{кин} = \frac{mv^2}{2} = \frac{mA_0^2 \omega_0^2}{2} \sin^2(\omega_0 t + \varphi_0) \quad (1.8)$$

$$E_{\max.кин} = E_{полн} = \frac{mA_0^2 \omega_0^2}{2} \quad (1.9)$$

$$U = E_{пот} = E_{полн} - E_{кин} = \frac{mA_0^2 \omega_0^2}{2} \underbrace{(1 - \sin^2(\omega_0 t + \varphi_0))}_{\cos^2}$$

$$U = E_{пот} = \frac{mA_0^2 \omega_0^2}{2} \cos^2(\omega_0 t + \varphi_0) \quad (1.10)$$

Дифференциальное уравнение.

Заметим, что

$$a = -\omega_0^2 x.$$

Тогда

$$x'' = -\omega_0^2 x$$

$$x'' + \omega_0^2 x = 0 \quad (1.11)$$

Это дифференциальное уравнение, описывающее незатухающие колебания. При этом уравнение (1.5) является его решением (Подробно все решения дифференциальных уравнений для колебательных процессов будет рассмотрен в [приложении](#)).

Вывод дифференциального уравнения для незатухающих колебаний.

1. Рассмотрим пружинный маятник. Из II закона Ньютона имеем:

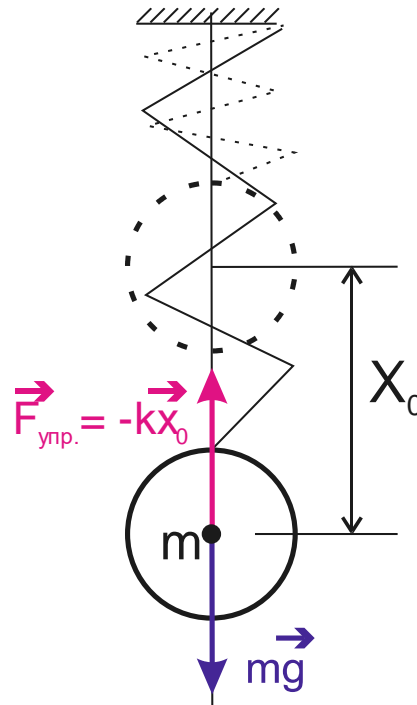


Рисунок 1.1

Уравнение гармонических колебаний – стационарные силы.

(Здесь и далее в разделе «Колебания» направление сил на чертеже до некоторой степени условно... В том смысле, что знаки у проекций мы будем брать исходя не из чертежа, а исходя из определяющих их законов)

$$\bar{F}_{упр} + m\bar{g} = 0$$

По закону Гука:

$$F_{упр} = -kx$$

$$-kx_0 + mg = 0$$

$$kx_0 = mg$$

Пусть груз выведен из состояния равновесия. Пусть X – состояние равновесия.

Тогда:

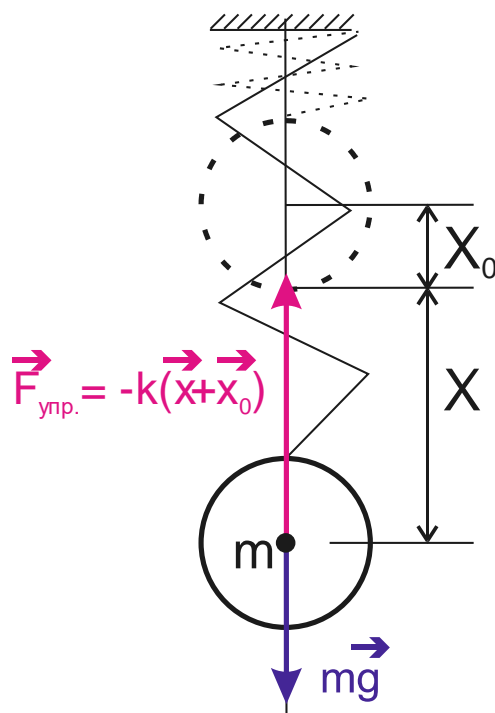


Рисунок 1.2

Гармонические незатухающие колебания пружинного маятника

$$\bar{F}_{упр} + m\bar{g} = m\bar{a}$$

$$F_{упр} = -k(x + x_0) = -kx - kx_0$$

$$- \underbrace{kx_0}_{mg} - kx + \cancel{mg} = ma$$

$$-kx = ma$$

$$ma + kx = 0$$

$$a = x'' \Rightarrow mx'' + kx = 0$$

$$x'' + \frac{kx}{m} = 0$$

Либо, используя Ньютоновскую систему обозначения производных по времени:

$$\ddot{x} + \frac{k}{m}x = 0$$

Обозначим

$$\omega_0^2 = \frac{k}{m}, \quad (1.12)$$

где ω_0 – собственная циклическая частота.

Тогда

$$\ddot{x} + \omega_0^2 x = 0$$

Получили уравнение (1.11), т.е. дифференциальное уравнение для незатухающих колебаний.

Замечание: поскольку движение тела под действием силы аналогично силе по закону Гука приводит к уравнению (1.11), а его интервалом (решением) является уравнение (1.5), то интегральное и дифференциальное определения гармонических колебаний дают определение одной и той же системы.

Циклическая частота в этом случае будет определяться соотношением:

$$\omega_0 = \sqrt{\frac{k}{m}}. \quad (1.13)$$

2. Рассмотрим **математический маятник**. Математическим маятником будем называть тело пренебрежимо малого размера (материальную точку) подвешенную на нерастяжимой нити (подвесе) и совершающее колебания с амплитудой малой по сравнению с длиной подвеса.

Из **II закона Ньютона для вращательного движения** (основной закон динамики вращательного движения) имеем:

Гармонические незатухающие колебания пружинного маятника

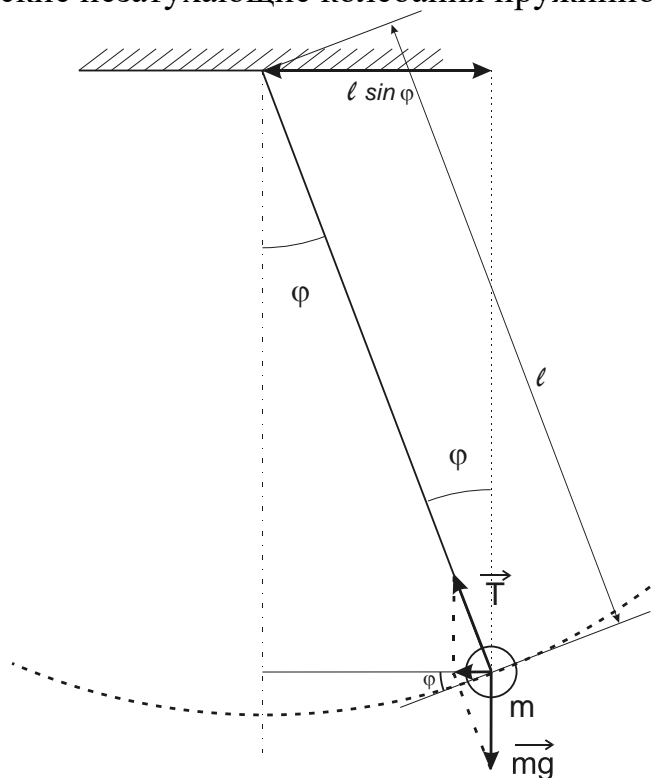


Рисунок 1.3
Математический маятник

Вывод уравнения гармонических колебаний для математического маятника:

$$I \varepsilon = M_{mg}$$

$$I = ml^2$$

$$\varepsilon = \frac{d^2 \varphi}{dt^2}$$

$$M_{mg} = -mgl \sin \varphi$$

$$\cancel{ml} \frac{d^2 \varphi}{dt^2} = -\cancel{mg} \sin \varphi$$

$$\frac{d^2 \varphi}{dt^2} + \frac{g}{l} \sin \varphi = 0$$

$$\sin \varphi \xrightarrow{\varphi \rightarrow 0} \varphi$$

$$\frac{d^2 \varphi}{dt^2} + \frac{g}{l} \varphi = 0$$

$$\frac{d^2 \varphi}{dt^2} + \omega^2 \varphi = 0,$$

$$\omega^2 = \frac{g}{l}. \tag{1.14}$$

$$T = 2\pi \sqrt{\frac{l}{g}}. \tag{1.15}$$

1.3. Затухающие гармонические колебания

Пусть в системе в наличии имеется сила вязкости или сопротивления.

$$\vec{F}_{\text{сопр}} = -r\vec{v}$$

по II закону Ньютона:

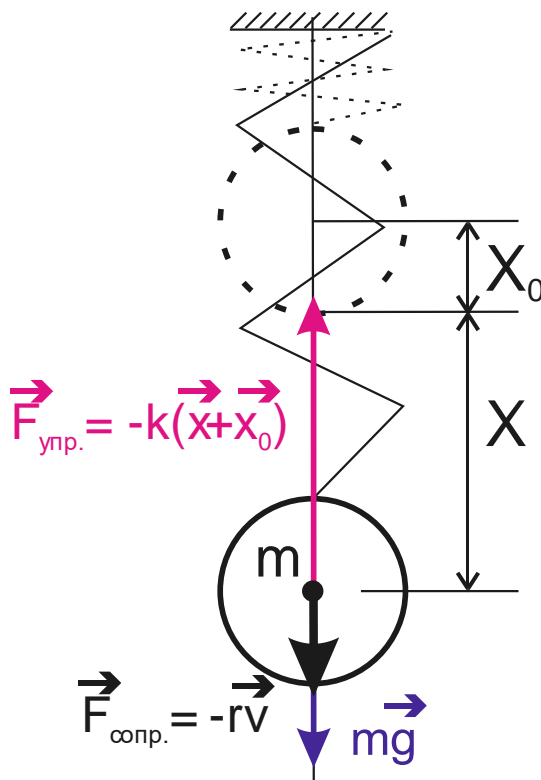


Рисунок 1.4

Гармонические затухающие колебания пружинного маятника

$$\vec{F}_{\text{упр.}} + \vec{F}_{\text{сопр.}} + m\vec{g} = m\vec{a},$$

$$-k(x_0 + x) - r\dot{x} + mg = ma,$$

$$-kx_0 - kx - r\dot{x} + mg = ma.$$

Здесь

$$kx_0 = mg.$$

$$ma + r\dot{x} + kx = 0$$

$$a = \ddot{x}$$

$$\dot{x} = \dot{x}$$

$$m\ddot{x} + r\dot{x} + kx = 0$$

$$\ddot{x} + \frac{r}{m}\dot{x} + \frac{k}{m}x = 0$$

$$\ddot{x} + 2\beta\dot{x} + \omega_0^2 x = 0.$$

(1.16)

Здесь мы ввели обозначения:

$$2\beta = \frac{r}{m}, \quad (1.17)$$

$$\omega_0^2 = \frac{k}{m},$$

где

ω_0 - собственная циклическая частота

β – коэффициент затухания

Решением этого уравнения является

$$x = A_0 e^{-\beta t} \cos(\omega t + \varphi_0), \quad (1.18)$$

ω - циклическая частота

$$\omega^2 = \omega_0^2 - \beta^2. \quad (1.19)$$

$A = A_0 e^{-\beta t}$ – амплитуда уменьшается со временем

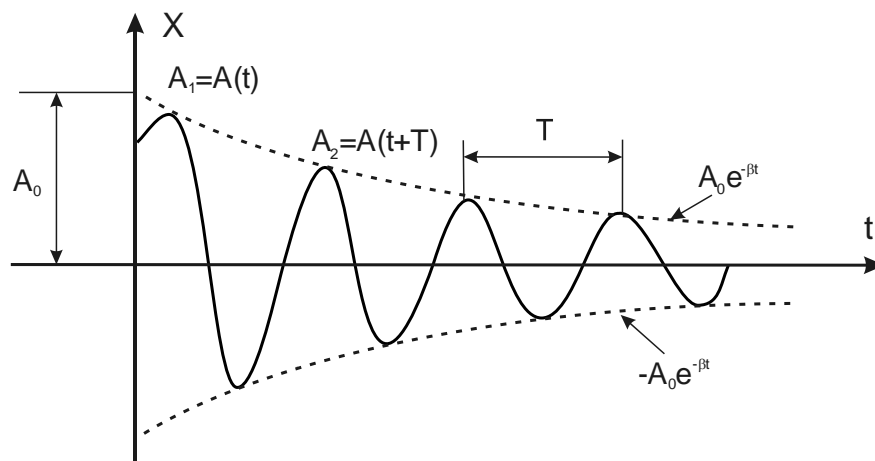


Рисунок 1.5

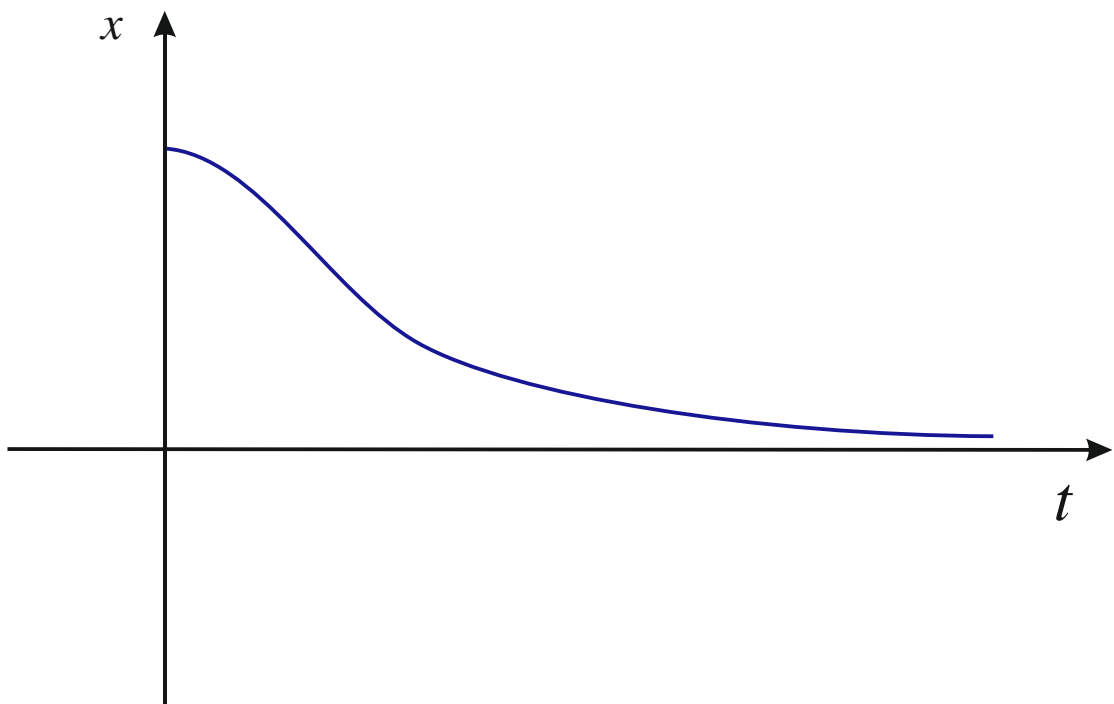
Гармонические затухающие колебания

$$T = \frac{2\pi}{\omega} = \frac{2\pi}{\sqrt{\omega_0^2 - \beta^2}}. \quad (1.20)$$

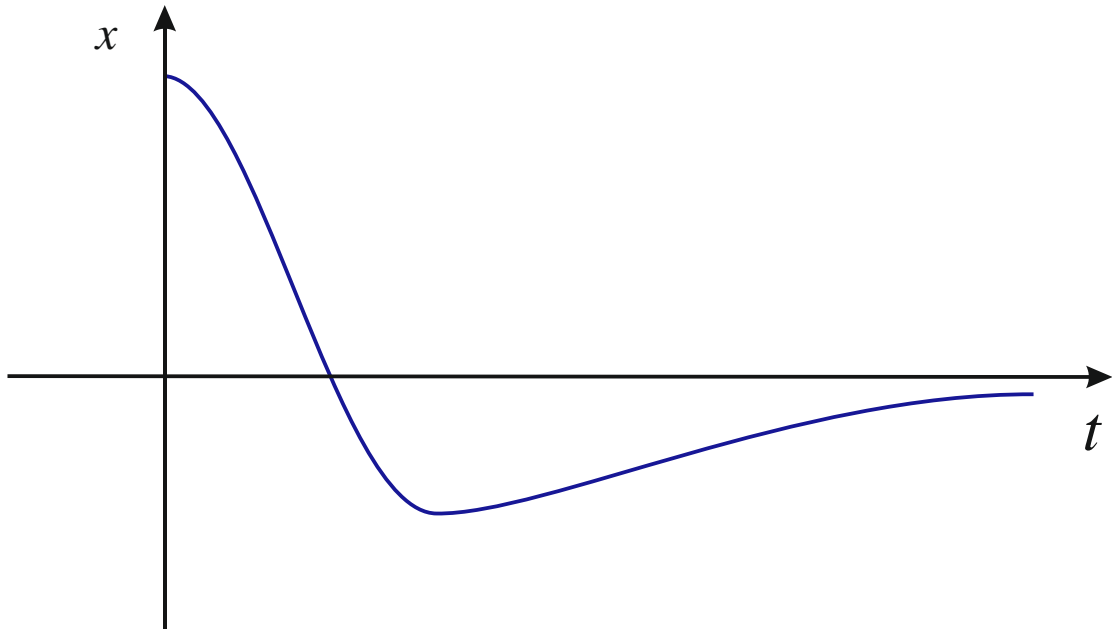
Если частота собственных незатухающих колебаний зависит только от параметров системы, то частота затухающих колебаний будет зависеть от параметров среды (сила сопротивления).

Поскольку сила сопротивления «притормаживает» движение, период затухающих колебаний будет больше чем незатухающих.

Если $\beta = \omega_0 \Rightarrow \omega = 0$, $T = \infty$ движение превращается в *апериодический процесс*. В зависимости от начальных условий он может иметь вид, представленный на Рисунок 1.6 (а) и (б).



а



б

Рисунок 1.6

График аperiodического процесса в зависимости от начальных условий

1.4. Параметры колебательной системы

1) *Декремент затухания* – отношение амплитуды колебания к амплитуде колебаний через период:

$$D = \frac{A(t)}{A(t+T)}. \quad (1.21)$$

Подставляя в выражение для амплитуды, получаем:

$$D = \frac{A(t)}{A(t+T)} = \frac{A_0 e^{-\beta t}}{A_0 e^{-\beta(t+T)}} = \frac{e^{-\beta t}}{e^{-\beta(t+T)}} =$$

$$= \frac{e^{-\beta t}}{e^{-\beta t - \beta T}} = \frac{\cancel{e^{-\beta t}}}{\cancel{e^{-\beta t}} e^{-\beta T}} = \frac{1}{e^{-\beta T}} = e^{\beta T},$$

$$D = e^{\beta T}.$$

2) **Логарифмический декремент затухания** – натуральный логарифм декремента затухания:

$$\lambda = \ln \frac{A(t)}{A(t+T)} = \ln e^{\beta T} = \beta T. \quad (1.22)$$

Отсюда выражение для **коэффициента затухания**:

$$\beta = \frac{\lambda}{T} \text{ – коэффициент затухания.} \quad (1.23)$$

3) **Постоянная времени τ** – время, через которое амплитуда колебаний уменьшается в e раз.

Вычислим её.

$$\frac{A(t)}{A(t+\tau)} = e,$$

$$\frac{A_0 e^{-\beta t}}{A_0 e^{-\beta(t+\tau)}} = e^{\beta \tau} = e^1.$$

Следовательно, равны степени экспоненты:

$$\beta \tau = 1 \Rightarrow \tau = \frac{1}{\beta}. \quad (1.24)$$

4) **Число колебаний N_e** – число колебаний, за которое амплитуда уменьшается в e раз:

$$N_e = \frac{\tau}{T} = \frac{1/\beta}{T} = \frac{1}{\beta T} = \frac{1}{\lambda/T} = \frac{1}{\lambda},$$

$$\beta = \frac{\lambda}{T}.$$

Отсюда:

$$N_e = \frac{1}{\lambda} \quad (1.25)$$

5) Добротность колебательной системы

$$Q = \frac{\pi}{\lambda} = \pi N_e. \quad (1.26)$$

(Физический смысл см. после резонанса)

1.5. Вынужденные колебания

На колебательную систему действует вынуждающая периодическая сила:

$$\bar{F} = \bar{F}_0 \cos(\omega t)$$

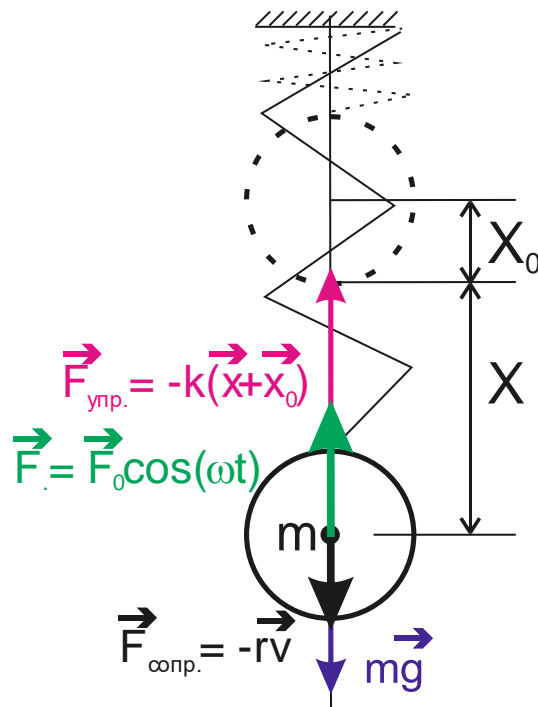


Рисунок 1.7
Вынужденные колебания

$$\begin{aligned} \bar{F}_{упр} + \bar{F}_{сопр} + m\bar{g} + \bar{F} &= m\bar{a}, \\ -k(x + x_0) - r\dot{x} + F &= ma, \\ -kx - \cancel{kx_0} - r\dot{x} + \cancel{mg} + F &= ma, \\ -kx - r\dot{x} + F &= ma, \\ m\ddot{x} + r\dot{x} + kx &= F_0 \cos(\omega t), \\ \ddot{x} + \frac{r}{m}\dot{x} + \frac{k}{m}x &= \frac{F_0}{m} \cos(\omega t). \end{aligned}$$

$$\ddot{x} + 2\beta\dot{x} + \omega_0^2 x = f_0 \cos(\omega t). \quad (1.27)$$

Здесь мы ввели обозначения:

$$\begin{aligned} 2\beta &= \frac{r}{m}, \\ \omega_0^2 &= \frac{k}{m}, \\ f_0 &= \frac{F_0}{m}, \end{aligned} \quad (1.28)$$

где

f_0 – нормированное амплитудное значение вынуждающей силы.

Решением данного дифференциального уравнения будет сумма общего решения однородного дифференциального уравнения (с нулем в правой части) и частного решения неоднородного уравнения (данного уравнения). Общее решение, таким образом, совпадает с уравнением затухающих гармонических колебаний и будет быстро спадать к нулю (см. [приложение](#)).

Частное решение будет иметь вид (это очевидно, если мы методично раскачиваем систему, со временем она на в любом случае начнёт двигаться в такт нашему воздействию, вопрос, с какой амплитудой и будит ли сдвиг фаз):

$$\begin{aligned} x &= A \cos(\omega t + \varphi_0), \text{ где} \\ A &= \frac{f_0}{\sqrt{(\omega_0^2 - \omega^2)^2 + 4\beta^2 \omega^2}}, \end{aligned} \quad (1.29)$$

$$\varphi_0 = \operatorname{arctg} \frac{\beta \omega}{\omega_0^2 - \omega^2}. \quad (1.30)$$

В самом общем же виде:

$$x = A \cos(\omega t + \varphi_0) + \left[A_0 e^{-\beta t} \cos\left(\sqrt{\omega_0^2 - \beta^2} t\right) \right], \quad (1.31)$$

где член в квадратных скобках в стационарном случае будет стремиться к нулю.

Из указанных выражений видно, что при приближении частоты вынуждающей силы к частоте собственных колебаний, амплитуда колебаний резко возрастет.

В случае, когда коэффициент затухания мал, амплитуда стремится к бесконечности.

$$\begin{aligned} \omega \rightarrow \omega_0 &\Rightarrow A(\uparrow), \\ \beta \rightarrow 0 &\Rightarrow A \rightarrow \infty. \end{aligned}$$

Это явление называется **резонансом**.

Df: Резонанс – это резкое увеличение амплитуды колебаний при приближении частоты вынуждающей силы к частоте собственных колебаний.

Добротность.

В случае вынужденных колебаний **добротность колебательной системы** будет показывать отношение амплитуды колебаний в резонансе к величине отклонения системы от состояния равновесия под действием стационарной силы, равной по величине амплитудному значению вынуждающей силы.

1.6. Электрические колебания

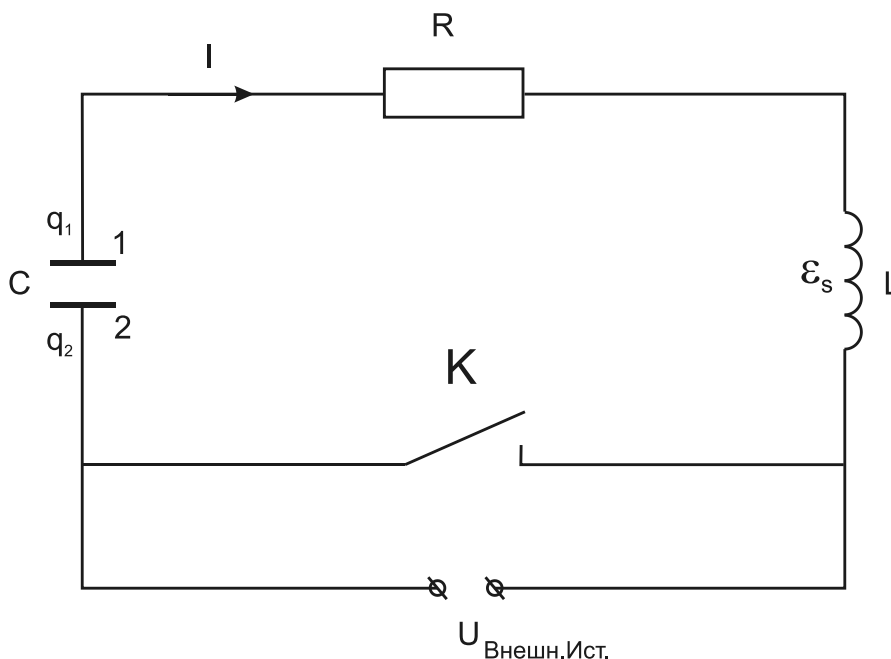


Рисунок 1.8
Электрический колебательный контур

Замечание: в этом разделе U – это не потенциальная энергия, а напряжение на участке электрической цепи.

Запишем закон Ома для участка цепи:

$$I = \frac{U}{R},$$

$$RI = U.$$

Учитывая определение силы тока, получим:

$$I = \frac{dq}{dt}$$

$$\Rightarrow R \frac{dq}{dt} = U.$$

Напряжение в этой цепи будет равно напряжению внешнего источника, ЭДС самоиндукции и разности потенциалов на конденсаторе:

$$U = U_{\text{Внешн.Ист.}} + \varepsilon_s + (\varphi_1 - \varphi_2).$$

ЭДС самоиндукции определяется по закону Фарадея:

$$\varepsilon_s = -L \frac{dI}{dt} = -L \frac{d^2 q}{dt^2}.$$

Из определения электрической ёмкости конденсатора получаем выражение для разности потенциалов через ёмкость:

$$C = \frac{q}{\Delta\varphi} = \frac{q}{\varphi_2 - \varphi_1} \Rightarrow (\varphi_1 - \varphi_2) = -\frac{q}{C}$$

$$\Rightarrow U = U_{\text{Внешн.Ист.}} - L \frac{d^2 q}{dt^2} - \frac{q}{C}.$$

Подставляя в исходное уравнение, получим:

$$R \frac{dq}{dt} = U_{\text{Внешн.Ист.}} - L \frac{d^2 q}{dt^2} - \frac{q}{C}.$$

Разделим правую и левую часть на индуктивность:

$$L \frac{d^2 q}{dt^2} + R \frac{dq}{dt} + \frac{1}{C} q = U_{\text{Внешн.Ист.}} \quad | :L,$$

$$\frac{d^2 q}{dt^2} + \frac{R}{L} \frac{dq}{dt} + \frac{1}{LC} q = \frac{U_{\text{Внешн.Ист.}}}{L},$$

$$\frac{d^2 q}{dt^2} + \frac{R}{L} \frac{dq}{dt} + \frac{1}{LC} q = \frac{U_0}{L} \cos(\omega t).$$

Введём обозначения:

$$\omega_0^2 = \frac{1}{LC}, \quad (1.32)$$

$$2\beta = \frac{R}{L}, \quad (1.33)$$

$$u_0 = \frac{U_0}{L}. \quad (1.34)$$

Получим *линейное неоднородное дифференциальное уравнение II порядка* – дифференциальное уравнение вынужденных колебаний:

$$\frac{d^2 q}{dt^2} + 2\beta \frac{dq}{dt} + \omega_0^2 q = u_0 \cos(\omega t),$$

или

$$\ddot{q} + 2\beta\dot{q} + \omega_0^2 q = u_0 \cos(\omega t). \quad (1.35)$$

2.6.1 Свободные незатухающие колебания

$$U_{\text{Внешн.Ист.}} = U_0,$$

ключ K – разомкнут (заряжаем), затем

$$U_{\text{Внешн.Ист.}} = 0,$$

ключ K – замкнут (колебательный процесс).

В случае свободных незатухающих колебаний внешнее воздействие (периодическое внешнее напряжение U) и активное сопротивление R отсутствуют:

$$\frac{d^2 q}{dt^2} + \frac{1}{LC} q = 0,$$

$$\omega_0^2 = \frac{1}{LC}.$$

$$\frac{d^2 q}{dt^2} + \omega_0^2 q = 0.$$

Из формулы связи периода и циклической частоты получим выражение для периода колебаний через ёмкость и индуктивность:

$$\omega_0^2 = \frac{1}{LC} \Rightarrow \omega_0 = \frac{1}{\sqrt{LC}}, \quad T = 2\pi\sqrt{LC}.$$

Решением этого дифференциального уравнения будет уравнение вида:

$$q = q_0 \cos(\omega_0 t + \varphi_0).$$

При этом уравнения для напряжения и силы тока будут иметь вид:

$$U = \frac{q}{C} = \frac{q_0}{C} \cos(\omega_0 t + \varphi_0) = U_0 \cos(\omega_0 t + \varphi_0), \quad (1.36)$$

$$I = \frac{dq}{dt} = -\omega_0 q_0 \sin(\omega_0 t + \varphi_0) = I_0 \cos(\omega_0 t + \varphi_0 + \frac{\pi}{2}),$$

$$I = I_0 \cos(\omega_0 t + \alpha), \quad \alpha = \varphi_0 + \frac{\pi}{2}. \quad (1.37)$$

Также выведем соотношение между амплитудными значениями напряжения и силы тока:

$$\left. \begin{array}{l} U_0 = \frac{q_0}{C} \\ I_0 = \omega_0 q_0 \end{array} \right\} \Rightarrow \frac{U_0}{I_0} = \frac{\cancel{q_0}}{C \omega_0 \cancel{q_0}} = \frac{1}{C \omega_0},$$

$$\left. \begin{array}{l} \frac{U_0}{I_0} = \frac{1}{C \omega_0} \\ \omega_0 = \frac{1}{\sqrt{LC}} \end{array} \right\} \Rightarrow \frac{U_0}{I_0} = \frac{\sqrt{LC}}{C} = \frac{\sqrt{L} \cancel{\sqrt{C}}}{\sqrt{C} \cancel{\sqrt{C}}} = \sqrt{\frac{L}{C}}.$$

Окончательно:

$$U_0 = \sqrt{L/C} \cdot I_0.$$

2.6.2 Свободные затухающие колебания

$$U_{\text{Внешн.Ист.}} = U_0,$$

ключ K – разомкнут (заряжаем), затем

$$U_{\text{Внешн.Ист.}} = 0,$$

ключ K – замкнут (колебательный процесс).

Внешнее периодическое воздействие отсутствует, активное сопротивление R не равно нулю. Дифференциальное уравнение принимает вид:

$$\frac{d^2 q}{dt^2} + \frac{R}{L} \frac{dq}{dt} + \frac{1}{LC} q = 0.$$

Или, вводя обозначения:

$$\omega_0^2 = \frac{1}{LC},$$

$$2\beta = \frac{R}{L},$$

$$\frac{d^2 q}{dt^2} + 2\beta \frac{dq}{dt} + \omega_0^2 q = 0.$$

Для собственной циклической частоты и коэффициента затухания имеем:

$$\omega_0^2 = \frac{1}{LC} \Rightarrow \omega_0 = \frac{1}{\sqrt{LC}},$$

$$\beta = \frac{R}{2L}.$$

Тогда, учитывая выражение для циклической частоты затухающих (1.19) колебаний и периода затухающих колебаний (1.20), получим:

$$\omega = \sqrt{\omega_0^2 - \beta^2} = \sqrt{\frac{1}{LC} - \frac{R^2}{4L^2}},$$

$$T = \frac{2\pi}{\sqrt{\omega_0^2 - \beta^2}} = \frac{2\pi}{\sqrt{1/(LC) - R^2/(4L^2)}}.$$

Уравнение для заряда будет иметь вид:

$$q = q_0 e^{-\beta t} \cos(\omega t + \varphi_0).$$

Также запишем выражение для логарифмического декремента затухания и добротности:

$$\lambda = \beta T = \frac{R}{2L} \frac{2\pi}{\omega} = \frac{\pi R}{L\omega}.$$

Если затухание не велико

$$\lambda \approx \frac{R}{2L} \frac{2\pi}{\sqrt{LC}} = \pi R \sqrt{\frac{C}{R}},$$

$$Q = \frac{\pi}{\lambda} = \frac{1}{R} \sqrt{\frac{L}{C}}. \quad (1.38)$$

Критическое значение (колебательный процесс переходит в аperiodический – постепенная разрядка конденсатора):

$$\beta^2 \geq \omega_0^2 \Rightarrow \frac{R^2}{4L^2} \geq \frac{1}{LC},$$

$$R_{\kappa} = 2\sqrt{\frac{L}{C}}. \quad (1.39)$$

2.6.3 Вынужденные колебания

В данном случае будут присутствовать все члены уравнения и все параметры.

$$U_{\text{Внешн.Ист.}} = U_0 \cos(\omega t),$$

ключ K – разомкнут

$$\frac{d^2 q}{dt^2} + \frac{R}{L} \frac{dq}{dt} + \frac{1}{LC} q = \frac{U_0}{L} \cos(\omega t).$$

Вводя обозначения:

$$\omega_0^2 = \frac{1}{LC},$$

$$2\beta = \frac{R}{L},$$

$$u_0 = \frac{U_0}{L},$$

получим:

$$\frac{d^2 q}{dt^2} + 2\beta \frac{dq}{dt} + \omega_0^2 q = u_0 \cos(\omega t).$$

Выражение для собственной циклической частоты и коэффициента затухания:

$$\omega_0^2 = \frac{1}{LC} \Rightarrow \omega_0 = \frac{1}{\sqrt{LC}},$$

$$\beta = \frac{R}{2L}.$$

Колебательное уравнение в выражении через заряд:

$$q = q_0 \cos(\omega t + \varphi_0),$$

где

$$q_0 = \frac{u_0}{\sqrt{(\omega_0^2 - \omega^2)^2 + 4\beta^2 \omega^2}},$$

$$\varphi_0 = \operatorname{arctg} \frac{\beta \omega}{\omega_0^2 - \omega^2}.$$

Колебательное уравнение в выражении через силу тока:

$$I = \frac{dq}{dt} \Rightarrow I = -\omega q_0 \sin(\omega t + \varphi_0) = -I_0 \sin(\omega t + \varphi_0) =$$

$$= I_0 \cos\left(\omega t + \varphi_0 + \frac{\pi}{2}\right),$$

$$I = I_0 \cos(\omega t + \psi), \quad \psi = \varphi_0 + \frac{\pi}{2}.$$

Здесь сдвиг фазы определяется из следующего выражения:

$$\operatorname{tg} \psi = \operatorname{tg} \left(\varphi_0 - \frac{\pi}{2} \right) = -\frac{1}{\operatorname{tg} \varphi_0},$$

$$\operatorname{tg} \psi = \frac{\omega L - 1/(\omega C)}{R}. \quad (1.40)$$

Амплитуда в уравнении колебаний для силы тока будет:

$$I_0 = \omega q_0 = \frac{\omega U_0 / L}{\sqrt{(\omega_0^2 - \omega^2)^2 + 4\beta^2 \omega^2}},$$

$$I_0 = \frac{U_0}{\sqrt{R^2 + (\omega L - 1/(\omega C))^2}}. \quad (1.41)$$

Резонанс.

$$\omega_{q \text{ рез.}} = \omega_{U_C \text{ рез.}} = \sqrt{\omega_0^2 - 2\beta^2} = \sqrt{\frac{1}{LC} - \frac{R^2}{2L^2}} \leq \omega_0 = \frac{1}{\sqrt{LC}},$$

$$R = 0 \Rightarrow \omega_{U_C \text{ рез.}} = \omega_0 = \frac{1}{\sqrt{LC}},$$

$$I \text{ рез.} \Rightarrow \omega L - 1/(\omega C) = 0 \Rightarrow \omega_{I \text{ рез.}} = \omega_0 = \frac{1}{\sqrt{LC}}$$

1.7. Система с минимумом потенциальной энергии (энергия колебательной системы)

Рассмотрим систему с минимумом потенциальной энергии. Выведем систему из состояния равновесия вблизи точки равновесия и рассмотрим ее дальнейшее поведение.

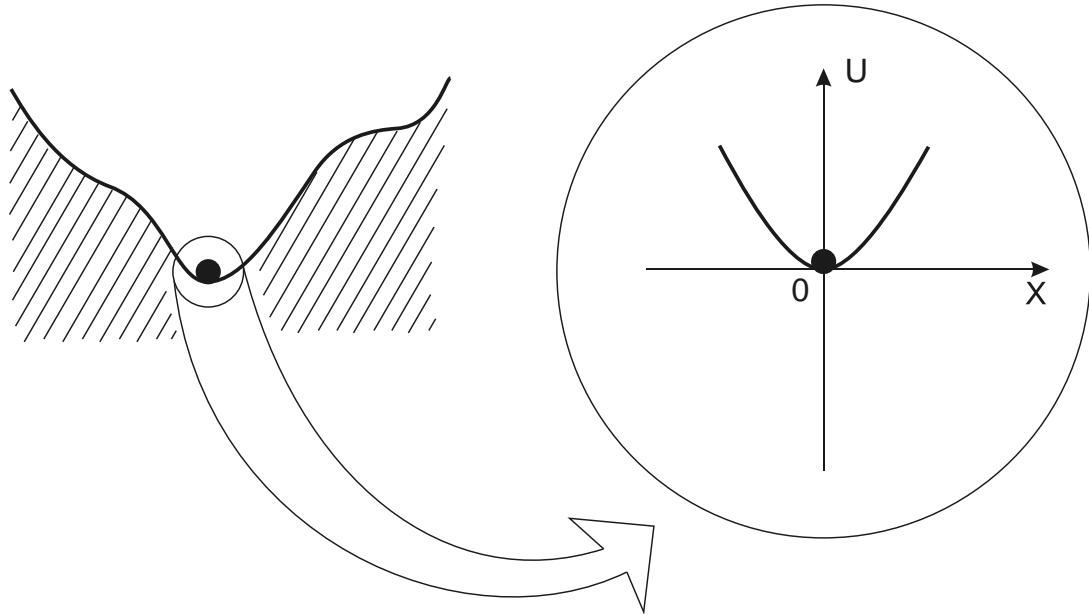


Рисунок 1.9

Система с минимумом потенциальной энергии

Для этого совершим следующие действия:

1. Перенесем начало координат в точку минимума потенциальной энергии.
2. Примем потенциальную энергию в точке минимума за ноль.
3. Разложим потенциальную энергию в ряд Тейлора и ограничимся членами второго порядка.

$$U(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} U^{(n)}(x_0) (x - x_0)^n \text{ – ряд Тейлора по определению.}$$

$$x_0 = 0 \Rightarrow U(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} U^{(n)}(0) (x)^n \text{ – ряд Маклорена.}$$

$$U(x) = \frac{1}{0!} U(0) x^0 + \frac{1}{1!} U'(0) x^1 + \frac{1}{2!} U''(0) x^2 + O(x^2),$$

$$U(x) \approx U_0 + U'(0) x + \frac{1}{2} U''(0) x^2$$

Учитывая ряд обстоятельств, получим:

$$U(x) = \frac{1}{2} U''(0) x^2 \quad - \text{ для одномерного пространства,}$$

так как:

$$U_0 = 0 \quad - \text{ мы приняли минимум потенциальной энергию за } 0,$$

$$U'(0) = 0 \quad - \text{ потенциальная энергия в нуле имеет экстремум (min).}$$

Далее вспомним, что градиент потенциальной энергии есть действующая на тело сила:

$$F = -\text{grad}U \quad - \text{ связь потенциальной энергии и силы,}$$

$$\text{grad} = \frac{d}{dx} \quad - \text{ для одномерного случая.}$$

Получим:

$$F = -\frac{dU}{dx} = -\frac{d(\frac{1}{2} U''(0) x^2)}{dx} = -\frac{1}{2} U''(0) 2x = -U''(0) x.$$

Введём обозначения:

$$k := U''(0) \quad - \text{ определим таким образом } k.$$

$$F = -kx \quad - \text{ в итоге имеем: на тело в этом случае действует квазиупругая или возвратная сила.}$$

Такая сила, как было указано выше, называется возвратной.

Повторяя вывод аналогичный выводу уравнения для колебаний пружинного маятника, приходим к уравнению:

$$\ddot{x} + \omega_0^2 x = 0.$$

Здесь

$$\omega_0^2 = \frac{k}{m} = \frac{U''(0)}{m}. \quad (1.42)$$

Тогда, решая уравнение, получаем:

$$x = A \cos(\omega_0 t + \varphi_0).$$

Система будет совершать гармонические колебания по этому закону. Т.о. любая система с минимумом потенциальной энергии будет иметь квазиупругую, возвратную силу и совершать в случае отсутствия диссипативных сил гармонические незатухающие колебания, в случае наличия диссипативных сил – гармонические затухающие колебания, в случае наличия вынуждающей силы – вынужденные колебания (теория выше приведена).

1.8. Представления гармонических колебаний

1.8.1. Представление в виде векторной диаграммы

Рассмотрим систему координат $X\bar{Y}$. Пусть вектор \vec{a} вращается со скоростью ω , пусть его длина A :

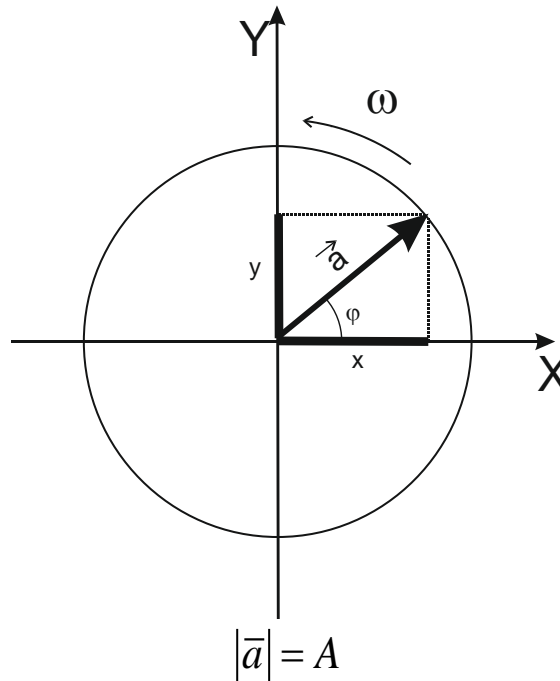


Рисунок 1.10

Представление гармонических колебаний в виде вращающегося вектора
(в виде векторной диаграммы)

Пусть φ – угол между вектором и осью $O\bar{X}$

Тогда $\varphi = \varphi_0 + \omega t$

Рассмотрим проекцию \vec{a} на ось $O\bar{X}$:

$$x = |\vec{a}| \cos \varphi, \quad (1.43)$$

$$x = A \cos(\omega t + \varphi_0).$$

Это уравнение будет задавать гармонические колебания с циклической частотой ω , амплитудой A и начальной фазой φ_0 .

1.8.2. Комплексное представление

Рассмотрим комплексную плоскость. Представим комплексное число, как:

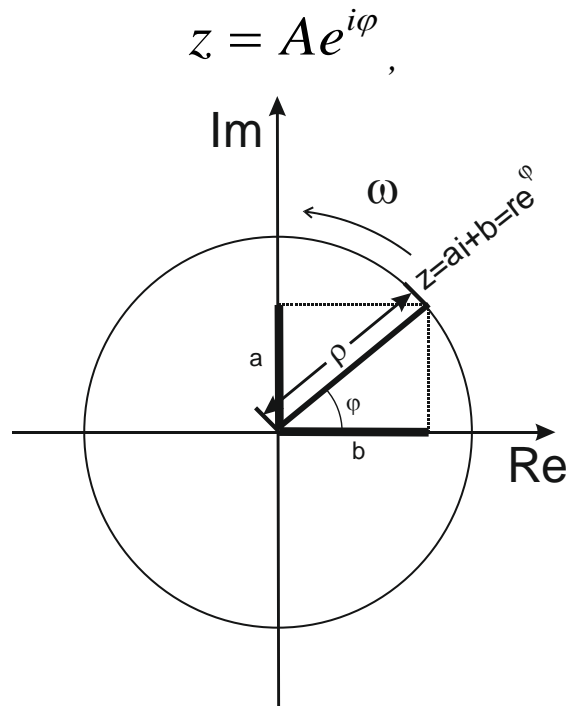


Рисунок 1.11

Представление гармонических колебаний в комплексном виде

Замечание: обычно комплексные числа представляют в двух видах

$$z = \rho e^{i\varphi} = ai + b,$$

где

$\rho = |z|$ – модуль числа

φ – его фаза

a – $Im(z)$ – мнимая часть

b – $Re(z)$ – действительная часть

Пусть в нашем случае $\rho \equiv A$. По теореме Эйлера:

$$e^{i\varphi} = \cos \varphi + i \sin \varphi$$

$$|e^{i\varphi}| = 1$$

$$z = Ae^{i\varphi} = A \cos \varphi + Ai \sin \varphi.$$

Пусть

$$\varphi = \omega t + \varphi_0.$$

Тогда

$$\begin{aligned} z &= Ae^{i(\omega t + \varphi_0)} = A(\cos(\omega t + \varphi_0) + i \sin(\omega t + \varphi_0)) = \\ &= A \cos(\omega t + \varphi_0) + Ai \sin(\omega t + \varphi_0). \end{aligned}$$

Пусть $x = \operatorname{Re}|z|$.

Тогда
$$x = \operatorname{Re}\left(Ae^{i(\omega t + \varphi_0)}\right) = \operatorname{Re}\left(A \cos(\omega t + \varphi_0) + Ai \sin(\omega t + \varphi_0)\right) = A \cos(\omega t + \varphi_0).$$

Таким образом действительная часть уравнения задает гармонические колебания. Значок «*Re*» – взятие действительной части – обычно опускают.

Вывод: Любое гармоническое колебание можно представить как вращение вектора, пусть даже в комплексной плоскости:

$$x = Ae^{i(\omega t + \varphi_0)}. \quad (1.44)$$

Замечание: это так же позволяет, введя понятие комплексной амплитуды, собрать в одном параметре все свободно задаваемые величины (величины, определяемые начальным и граничными условиями задачи):

$$x = Ae^{i(\omega t + \varphi_0)} = Ae^{i(\omega t) + i(\varphi_0)} = Ae^{i(\omega t)} e^{i(\varphi_0)} = \underbrace{Ae^{i\varphi_0}}_{\hat{A}} e^{i\omega t} = \hat{A}e^{i\omega t}.$$

Здесь:

$$\hat{A} = Ae^{i\varphi_0} \quad - \text{ комплексная амплитуда.}$$

1.9. Сложение колебаний

1.9.1. Скалярное сложение

Пусть система участвует в двух колебательных процессах.

Рассмотрим векторное представление. Пусть \vec{a}_1 задает первое колебательное движение, а \vec{a}_2 – второе.

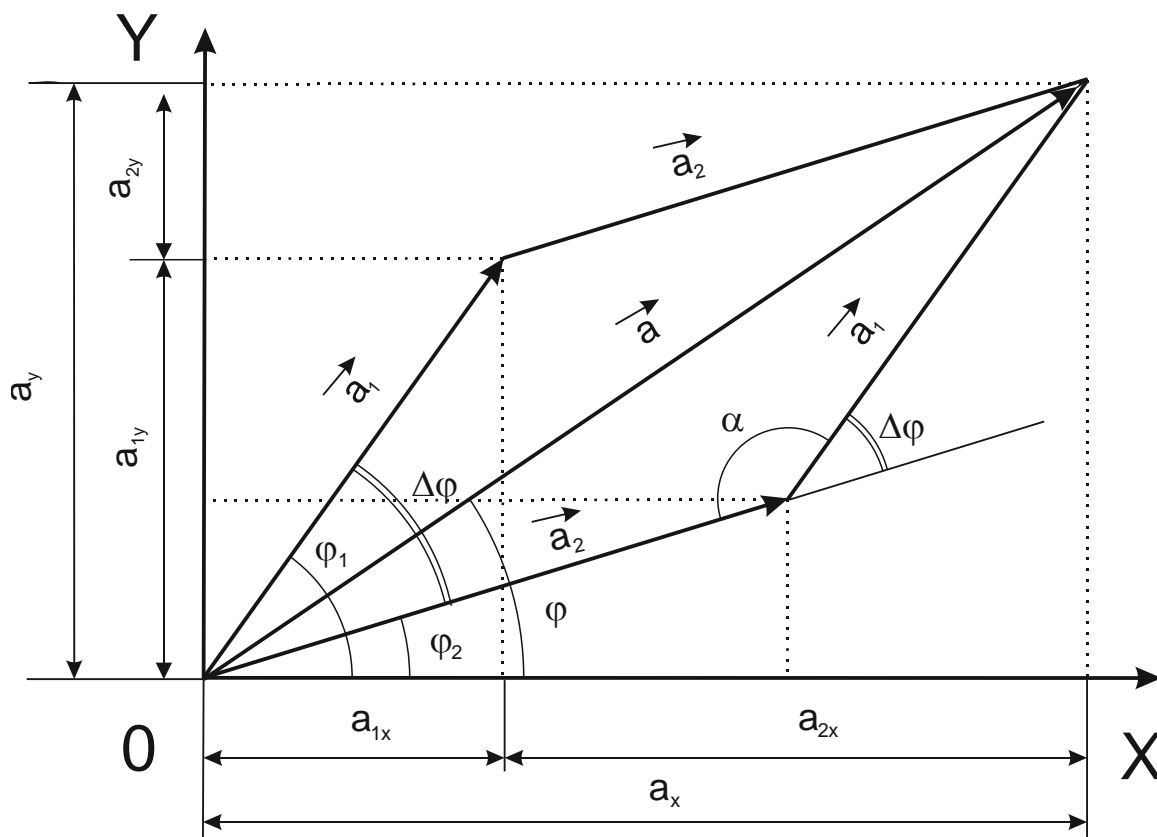


Рисунок 1.12

Сложение гармонических колебаний на векторной диаграмме

И пусть оба вектора равномерно вращаются вокруг начала координат каждый со своей угловой скоростью:

$$\vec{a}_1 : \varphi_1 = \omega_1 t + \varphi_{01},$$

$$\vec{a}_2 : \varphi_2 = \omega_2 t + \varphi_{02}.$$

Тогда разность фаз:

$$\Delta\varphi = \varphi_1 - \varphi_2$$

Сумма колебаний будет задаваться суммой этих векторов (резльтирующее колебание будет задаваться векторной суммой векторов \vec{a}_1 и \vec{a}_2). По теореме косинусов:

$$|\vec{a}|^2 = |\vec{a}_1 + \vec{a}_2|^2 = |\vec{a}_1|^2 + |\vec{a}_2|^2 - 2|\vec{a}_1||\vec{a}_2|\cos\alpha,$$

Причём:

$$\alpha = \pi - \Delta\varphi.$$

Тогда:

$$\cos \alpha = \cos(\pi - \Delta\varphi) = -\cos \Delta\varphi.$$

Подставив в выражение, полученное, получим:

$$|\bar{a}|^2 = |\bar{a}_1|^2 + |\bar{a}_2|^2 + 2|\bar{a}_1||\bar{a}_2|\cos \Delta\varphi|.$$

Пусть:

$$|\bar{a}| = A,$$

$$|\bar{a}_1| = A_1,$$

$$|\bar{a}_2| = A_2.$$

Тогда:

$$\begin{aligned} A^2 &= A_1^2 + A_2^2 + 2A_1A_2 \cos(\omega_1 t + \varphi_{01} - \omega_2 t - \varphi_{02}) = \\ &= A_1^2 + A_2^2 + 2A_1A_2 \cos((\omega_1 - \omega_2)t + \Delta\varphi_0) \end{aligned}$$

Замечание: если $\omega_1 \neq \omega_2$, то амплитуда результирующих колебаний будет зависеть от времени и меняться непонятным образом.

Вывод: общий случай нас не интересует.

Замечание: если $\omega_1 = \omega_2 = \omega$

Амплитуда результирующих колебаний не зависит от времени и вращение вектора $\bar{a} = \bar{a}_1 + \bar{a}_2$ будет задавать новое гармоническое колебание, являющееся суммой исходных.

Пусть $\omega_1 = \omega_2 = \omega$

$$\text{Тогда} \quad A^2 = A_1^2 + A_2^2 + 2A_1A_2 \cos \Delta\varphi_0 \quad (1.45)$$

В случае если:

$$1) \Delta\varphi_0 = 0 + 2\pi k \rightarrow \max : \quad (1.46)$$

$$A = \sqrt{A_1^2 + A_2^2 + 2A_1A_2},$$

$$A_1 = A_2 = A_0,$$

$$A = 2A_0. \quad (1.47)$$

$$2) \Delta\varphi_0 = \pi + 2\pi k \rightarrow \min : \quad (1.48)$$

$$A = \sqrt{A_1^2 + A_2^2 - 2A_1A_2},$$

$$A_1 = A_2 = A_0,$$

$$A = 0. \quad (1.49)$$

Для сдвига фаз имеем:

$$\varphi : tg = \frac{y}{x} = \frac{|a_1| \sin \varphi_1 + |a_2| \sin \varphi_2}{|a_1| \cos \varphi_1 + |a_2| \cos \varphi_2}$$

$$\varphi_0 : t = 0 \Rightarrow \varphi_1 = \varphi_{01}$$

$$\varphi_2 = \varphi_{02}$$

$$tg \varphi = \frac{A_1 \sin \varphi_{01} + A_2 \sin \varphi_{02}}{A_1 \cos \varphi_{01} + A_2 \cos \varphi_{02}} \quad (1.50)$$

В случае, если $\omega_1 \neq \omega_2$, но $\Delta \omega = \omega_1 - \omega_2$ мало (если они $\omega_1 \approx \omega_2$), то имеем случай биений. Если частоты близки, имеем биения:

$$|a|^2 = |a_1|^2 + |a_2|^2 + 2|a_1||a_2| \cos((\omega_1 - \omega_2)t + \Delta \varphi_0). \quad (1.51)$$

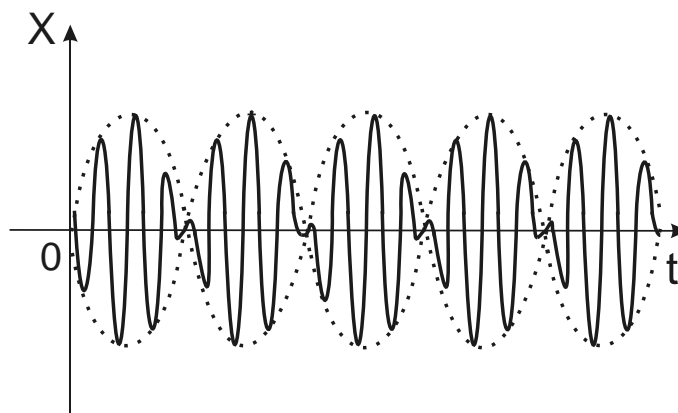


Рисунок 1.13
Биения

1.9.2. Векторное сложение

(сложение взаимно перпендикулярных колебаний).

В случае, если складывают колебания взаимно перпендикулярных направлений, нельзя говорить о том или ином изменении гармонических колебаний. В результате сложения, колеблющаяся точка или вектор будет описывать некоторую замкнутую траекторию (*фигуру эллипс, окружность, Листажу и т.д.*).

Пусть:

$$x = A_1 \cos \omega t,$$

$$y = A_2 \cos(\omega t + \varphi_0).$$

Если $\varphi_0 = \frac{\pi}{2}$, результат сложения — эллипс:

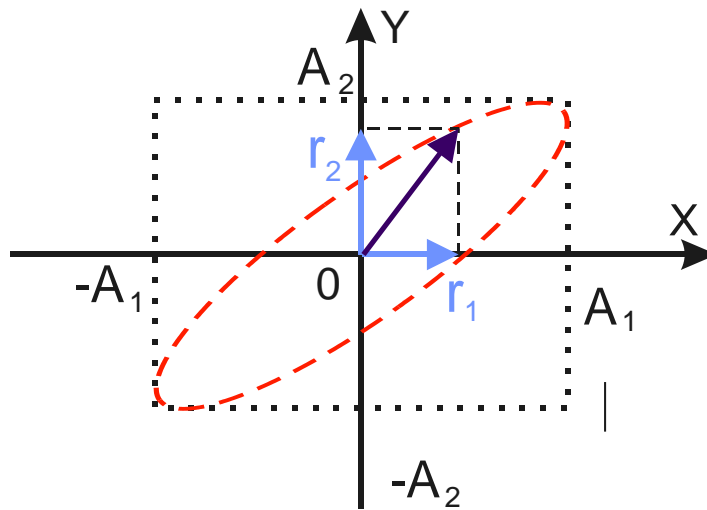


Рисунок 1.14

Результат сложения колебаний – эллипс

а, если $A_1 = A_2$ результат сложения – окружность.

Если $\varphi_0 = 0$, результат сложения – гармонические колебания, где движение происходит по диагонали.

Пусть:

$$x = A \cos \omega t$$

$$y = A \cos 2\omega t$$

результат сложения – лемниската Бернулли:

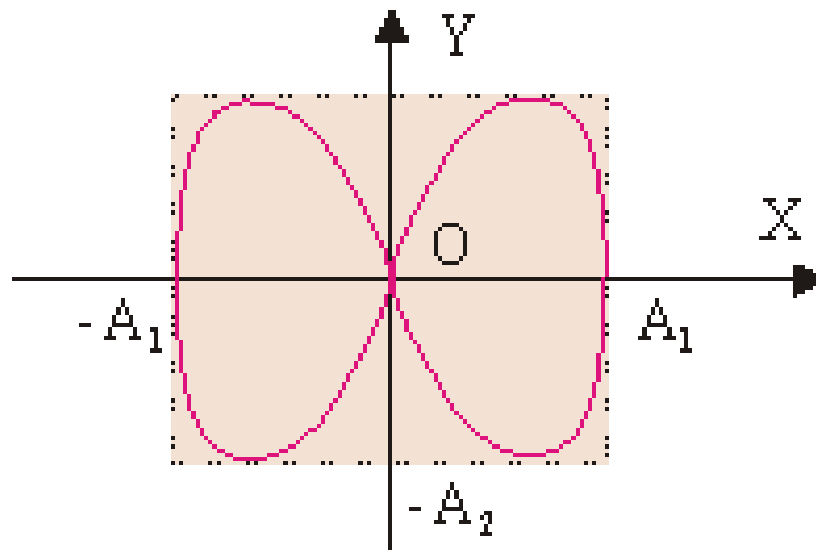


Рисунок 1.15

Результата сложения колебаний – лемниската Бернулли

2. Волны – общая теория

2.1. Волна, её уравнение и параметры

2.1.1. Вводные определения

Два определения волны мы уже давали в начале этого раздела курса, в начале главы о колебаниях. Приведём их ещё раз:

Волна (в узком смысле) – процесс распространения колебаний в пространстве с течением времени.

Волна (в широком смысле) – процесс распространения возмущений в пространстве с течением времени.

Замечание 1. Основной отличительной особенностью волны является перенос энергии без переноса вещества.

Замечание 2. Существует подход, когда волной называют любую функцию координат и времени. В самом деле: помимо обычных волн, с которых мы начинаем изучение данного вопроса и которые иногда ещё называют бегущими, существуют стоячие волны. В отношении них невозможно сказать, что они являются процессом распространения чего-либо и куда-либо. С этим видом волн мы познакомимся чуть позже. Тогда, действительно, наше определение сужает круг рассматриваемых явлений. Однако, мы будем смотреть на стоячие волны, как на суперпозицию двух бегущих волн, одинаковой частоты и амплитуды, движущихся на встречу друг другу. Иначе, как на интерференцию бегущей волны с ней же сомой, отражённой от препятствия. В этом случае, всё многообразие явлений вполне можно уложить и в наше определение.

Более строго, с **математической точки зрения**, волной мы будем считать любое решение волнового уравнения (уравнения второго порядка в частных производных), которое так же будет рассмотрено позже. С этой точки зрения, **волной является любая функция координат и времени, удовлетворяющая соответствующему дифференциальному уравнению.**

Недостатком предложенного подхода (считать волной любую функцию координат и времени) является то, что это определение практически совпадает с определением поля (область пространства, в каждой точке которой задана некая скалярная, векторная или тензорная величина). В любом случае, следует помнить, что **волна описывает процесс**, а поле (речь не идёт, скажем, о «поле температур») является математической моделью вида материи. Процесс есть способ существования материи во времени, но сам не является материальной вещью.

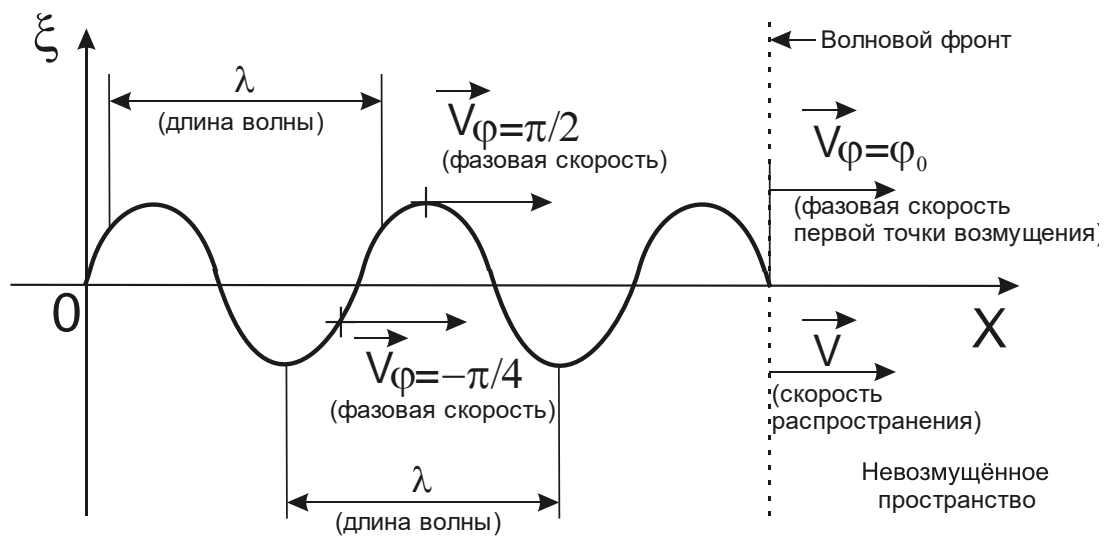


Рисунок 2.1
Параметры волны

На Рисунок 2.1:

- $v_{\varphi=\dots} = v_{\varphi}$ – фазовая скорость, скорость движения «гребня» волны, или же любой точки с постоянным значением фазы ($\varphi=\dots$ указывает, движением точки с каким конкретным значением фазы соответствует данная фазовая скорость);
- v – скорость распространения волны, скорость движения волнового фронта;
- λ – длина волны (точное определение этой физической величины будет дано чуть ниже).

Определения.

Df 1. Волновой фронт – геометрическое место точек, до которых дошла волна (возмущение, колебание).

Df 2. Волновая поверхность – геометрическое место точек, колеблющихся в одной фазе.

Классификация волн.

1) Плоская, сферическая:

Плоская волна – волна, волновой фронт которой представляет собой плоскость.

Сферическая волна – волна, волновой фронт которой представляет собой сферу.

2) Продольные, поперечные:

Продольные волны – волна, колебания в которой происходят в направлении параллельном направлению ее распространения (перпендикулярно волновому фронту).

Поперечная волна – волна, колебания в которой происходят в плоскости перпендикулярной направлению ее распространения.

Замечание: Любую произвольную волну всегда можно представить в виде суммы продольной и поперечной волны (если соответствующие компоненты в ней присутствуют)

Можно показать, что в любом случае продольная и поперечная волны будут сильно отличаться по свойствам.

Пример: Звук – продольная волна

Электромагнитная волна (свет) – поперечная волна

Волна в упругой среде (в кристалле) – есть и продольная и поперечная составляющая, но скорость продольной больше, чем поперечной.

3) *Монохроматическая волна* – представляет собой бесконечный синус или косинус. Это процесс распространения гармонических колебаний.

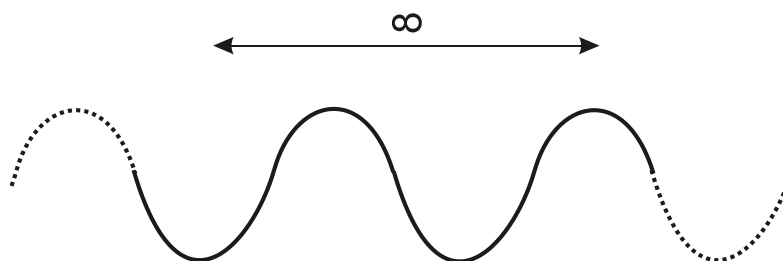


Рисунок 2.2
Монохроматическая волна

4) *Цуг* – волна, представляющая собой отрезок синуса или косинуса конечной длины.



Рисунок 2.3
Цуг

5) *Волновой пакет* – волна, являющаяся суммой, суперпозицией нескольких монохроматических волн различных частот или диапазона частот.

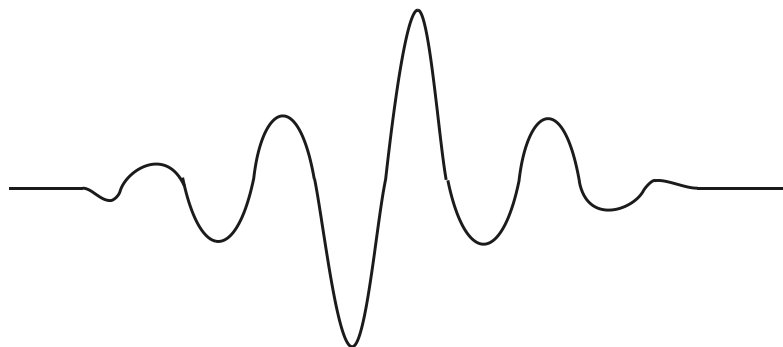


Рисунок 2.4
Волновой пакет

6) Экзотика

Солитон (уединённая волна, к пр. цунами), ударная волна.

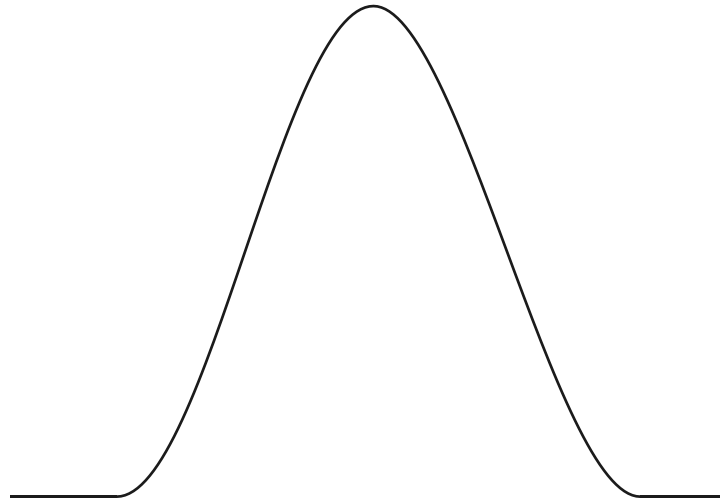


Рисунок 2.5
Солитон – уединённая волна

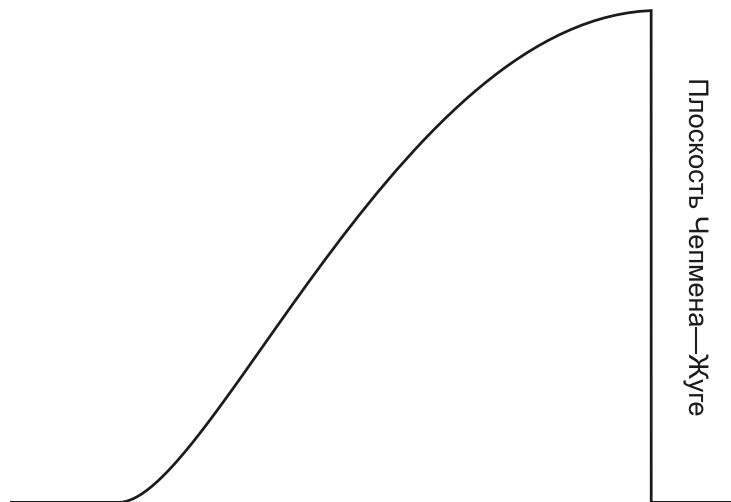


Рисунок 2.6
Ударная волна

Уравнение волны (интегральное уравнение, монохроматическая волна).

Для одномерного случая (\mathbb{R}^1) уравнение волны имеет вид:

$$\xi = A \cos(\omega t - k r + \varphi_0), \quad (2.1)$$

где k – волновое число,

$$k = \frac{\omega}{v} = \frac{2\pi}{\lambda}, \quad (2.2)$$

ω – циклическая частота,

v – скорость волны,

λ – длина волны.

r – радиус-вектор, для одномерного случая совпадающей с координатой x .

Замечание: Оба соотношения для волнового числа будут получены ниже и на них необходимо обратить особое внимание!

Либо тоже выражение в комплексном (экспоненциальном представлении (*подробности вывода см. «Колебания» – «Представление колебаний» – «Комплексная форма»*):

$$\xi = Ae^{i(\omega t - kx + \varphi_0)}, \quad (2.3)$$

либо с комплексной амплитудой:

$$\xi = \hat{A}e^{i(\omega t - kx)}, \quad (2.4)$$

$$\hat{A} = Ae^{i\varphi_0}. \quad (2.5)$$

Отметим, что здесь и далее в общей теории волн ξ – колеблющаяся, изменяющаяся величина, распространение возмущения которой мы рассматриваем:

$$\xi \in \{\Delta x, \Delta y, P, \rho, \bar{E}, \bar{B}, \bar{D}, \bar{H}, \dots\}.$$

В частности, для механической волны это смещение координаты точки в направлении оси X или Y ($\Delta x, \Delta y$), для звука – плотность или давление газа (P, ρ), для света или электромагнитной волны (в общем случае) – напряжённость электрического и магнитного полей (\bar{E}, \bar{H}).

Уравнение плоской или сферической волны (\mathbb{R}^3).

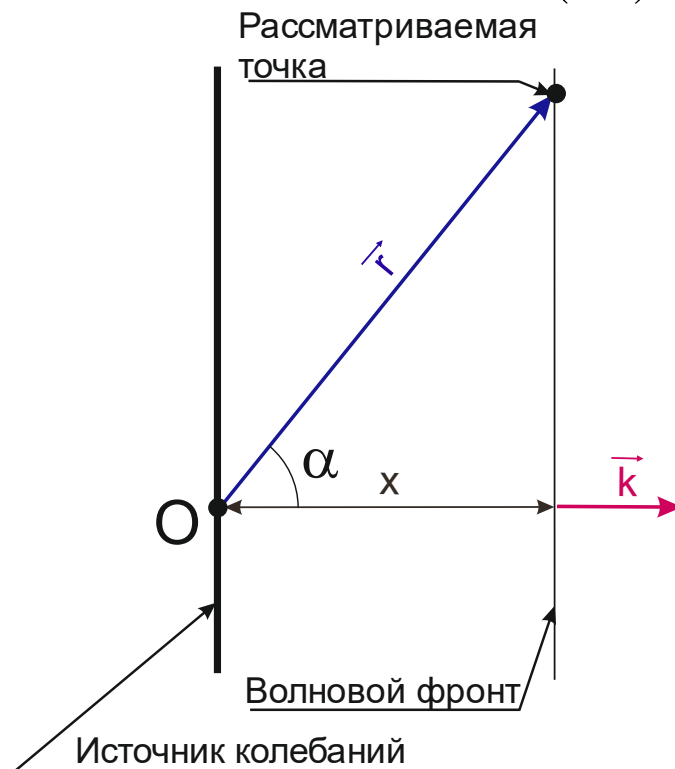


Рисунок 2.7
Плоская волна:

$$kx = |\vec{k}| \cdot \underbrace{|\vec{r}| \cdot \cos \alpha}_x = \vec{k} \cdot \vec{r}$$

Плоская волна, распространяющаяся в произвольном направлении:

$$\xi = A_0 \cos(\omega t - \vec{k} \cdot \vec{r} + \varphi_0), \quad (2.6)$$

где

\vec{k} – волновой вектор:

$$\vec{k} = k \vec{n},$$

$|\vec{n}| = 1$ – единичная нормаль к волновой поверхности,

k – волновое число,

\vec{r} – радиус-вектор,

$$k = \frac{\omega}{v} = \frac{2\pi}{\lambda},$$

ω – циклическая частота,

v – скорость волны,

λ – длина волны.

В случае если ось X выбрана в направлении распространения волны:

$$OX \uparrow\uparrow \vec{r}, \vec{k} \uparrow\uparrow \vec{r},$$

$$\xi = A_0 \cos\left(\omega t - \frac{2\pi}{\lambda} x + \varphi_0\right).$$

$$\vec{k} \cdot \vec{r} = kx = \frac{2\pi}{\lambda} x$$

– распространяется в сторону X :

$$\vec{r} \uparrow\uparrow \vec{k}, \vec{r} \uparrow\uparrow OX$$

Сферическая волна:

$$\xi = \frac{A_0}{r} \cos(\omega t - kr + \varphi_0),$$

$$k = \frac{2\pi}{\lambda}.$$

r – расстояние до источника.

Однако, имеем:

$$\vec{k} \uparrow\uparrow \vec{r}$$

Таким образом, можем записать уравнение, аналогично уравнению плоской волны:

$$\xi = \frac{A_0}{r} \cos(\omega t - \vec{k} \cdot \vec{r} + \varphi_0). \quad (2.7)$$

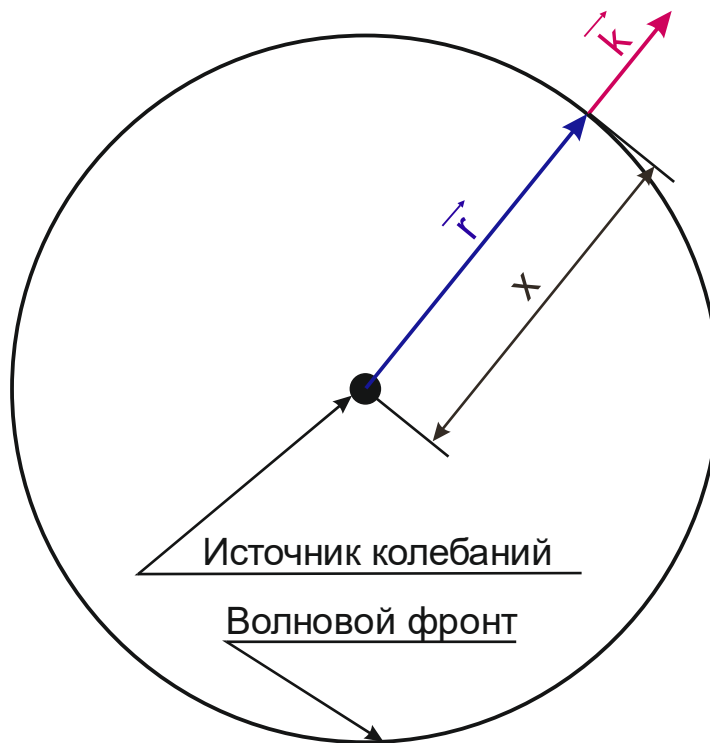


Рисунок 2.8

Сферическая волна:

$$k x = |\bar{k}| |\bar{r}| = \bar{k} \cdot \bar{r}$$

В общем случае можем записать (для плоской, сферической волны):

$$\xi = A(\bar{r}, t) \cos(\omega t - \bar{k} \cdot \bar{r} + \varphi_0). \quad (2.8)$$

Замечание: во всех уравнениях ξ – колеблющаяся величина, A_0 – начальное значение амплитуды колебаний этой величины.

Электромагнитная волна: $\xi = E$, $A_0 = A_0 = E_0$

Механическая волна (звук): $\xi = \Delta x$, $A_0 = A_0$ амплитуде изменения координаты.

2.1.2. Дифференциальное уравнение волн

В математике под волной понимается решение дифференциального уравнения в частных производных (уравнение математической физики), следующего виде:

одномерный случай (\mathbb{R}^1)

$$\frac{\partial^2 \xi}{\partial x^2} = \frac{1}{v^2} \frac{\partial^2 \xi}{\partial t^2}, \quad (2.9)$$

трёхмерный случай (\mathbb{R}^3)

$$\Delta \xi = \frac{1}{v^2} \frac{\partial^2 \xi}{\partial t^2}, \quad (2.10)$$

где

$$\Delta = \nabla^2 = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2}.$$

Решением такого уравнения будет являться любая функция следующего вида (это точно доказывается в разделе математики «математическая физика»):

$$\xi = f\left(t \mp \frac{x}{v}\right). \quad (2.11)$$

Причём, величина v является скоростью волны (в общем случае фазовой скоростью, но, поскольку здесь мы обычно ищем простые решения, и, следовательно, решения, соответствующие монохроматической волне, она же скорость распространения; так же и в условиях отсутствия дисперсии – скорость распространения произвольной волны).

Можно показать, что это же решение также удовлетворяет дифференциальному уравнению первого порядка:

$$\frac{\partial \xi}{\partial x} = \mp \frac{1}{v_\phi} \frac{\partial \xi}{\partial t}. \quad (2.12)$$

Правда знак « \mp » (для прямой и обратной волны) здесь нужно вводить руками. Иногда именно это уравнение используется в качестве дифференциального уравнения волны. В этом случае его называют *кинетическим уравнением*, а приведённое выше уравнение второго порядка – *динамическим*.

Теперь разберём связь решения волнового уравнения с уравнением монохроматической волны. Если рассмотреть в обратном порядке приведённые выше преобразования (см. «Скорость волны» – «Скорость распространения волны»):

$$\begin{aligned} \xi &= A \cos(\omega t - k r + \varphi_0) \Leftrightarrow \\ \xi &= \xi_0 \cos\left(\omega t - \frac{\omega}{v} x + \varphi_0\right) \Leftrightarrow \\ \xi &= \xi_0 \cos\left(\omega \left(t - \frac{x}{v}\right) + \varphi_0\right), \end{aligned}$$

то получим, что данное уравнение также является решением волнового уравнения. В общем случае можно записать

$$\xi = \xi_0 \cos \left(\omega \left(t \mp \frac{x}{v} \right) + \varphi_0 \right).$$

Здесь знак « \rightarrow » соответствует волне, распространяющейся вперёд, а знак « $+$ » волне, распространяющейся назад, в обратную сторону (либо отражённой от препятствия).

Причём,

$$f(\zeta) = \xi_0 \cos(\omega \zeta + \varphi_0) \Rightarrow$$

$$\underbrace{\xi = f \left(t \mp \frac{x}{v} \right)}_{\text{Решение диф. уравнения}} = \underbrace{\xi_0 \cos \left(\omega \left(t \mp \frac{x}{v} \right) + \varphi_0 \right)}_{\zeta \rightarrow t \mp \frac{x}{v}}.$$

Может показаться, что в данном случае мы сужаем класс решений данного уравнения и не описываем его общего решения. Однако вспомним, что по теореме Фурье любая периодическая функция может быть представлена, как бесконечная сумма синусов и косинусов, а любая (не обязательно периодическая) функция – как интеграл от них. Это преобразование называется разложением в спектр. Его физический аналог – разложение в спектр световой волны.

Вывод: любое решение данного уравнения мы всегда сможем представить, как бесконечную сумму (или бесконечный интеграл) монохроматических волн. Однако они, в отличие от определения волны «в широком смысле», уже являются процессом распространения гармонических колебаний. И о них мы уже можем сказать достаточно много (в отличие от «волны вообще»)!

2.2. Параметры волны – скорость и длина

2.2.1. Монохроматическая волна

Рассмотрим сначала монохроматическую волну. Как мы уже говорили, она представляет собой процесс распространения гармонических колебаний. В процессе рассмотрения раздела «Колебания» мы уже убедились, что гармонические колебания – достаточно распространённый вид колебательных процессов. Гармоническими будут являться любые колебательные процессы, протекающие в системе с минимумом потенциальной энергии вблизи точки равновесия. С другой стороны, любой волновой процесс всегда может быть разложен в спектр – сведён к пусть и бесконечной сумме, но простых монохроматических волн. И об этом мы поговорим в следующем параграфе.

Длина волны

Для простоты будем рассматривать одномерный случай. Тогда уравнение монохроматической волны, как мы уже говорили, будет иметь вид:

$$\xi = A \cos \left(\underbrace{\omega t - kx + \varphi_0}_{\varphi} \right)$$

Df. *Фазовая скорость волны* – скорость движения точки с постоянным значением фазы (скажем, гребня волны). По определению:

$$v_{\varphi} = \frac{dx|_{\varphi=\text{const}}}{dt}.$$

Покажем, что фазовая скорость определяется выражением:

$$v_{\varphi} = \frac{\omega}{k}.$$

И так, пусть фаза в выражении для фазы имеет постоянное значение:

$$\omega t - kx + \varphi_0 = \text{const},$$

и волновое число k здесь всего лишь некий коэффициент перед x .

Продифференцируем правую и левую части:

$$d(\omega t - kx + \varphi_0) = 0.$$

Напомним, для монохроматической волны частота также является константой. Переменные здесь временная и пространственные координаты. Получим:

$$\begin{aligned} \omega dt - k dx &= 0, \\ \omega dt &= k dx. \end{aligned}$$

Подлив правую и левую части на k и dt , получим выражение для фазовой скорости:

$$v_{\varphi} = \frac{dx}{dt} = \frac{\omega}{k}.$$

Отсюда так же имеем выражение для связи волнового числа с циклической частотой и фазовой скоростью. Заметим, что выражение, полученное в ходе данных преобразований, есть именно фазовая скорость (по определению).

Длина волны

Приведём два определения для этой величины.

Df.1. *Длина волны* – минимальное расстояние между точками, колеблющимися в одной фазе.

Df.2. *Длина волны (по Савельеву)* – расстояние, которое проходит волна за один период колебаний.

Покажем эквивалентность двух определений длины волны (для монохроматической волны).

И так. *Длина волны* – наименьшее расстояние между точками, колеблющимися в одной фазе. Обозначим её пока, как λ' . Рассмотрим разность фаз колебаний в двух точках, отстоящих друг от друга на λ' и потребуем, чтобы эта разность равнялась 2π :

$$\varphi(x) - \varphi(x + \lambda') = 2\pi.$$

Подставим сюда выражение для фазы и произведём упрощения:

$$\begin{aligned} \cancel{\omega t} - kx + \cancel{\varphi_0} - \cancel{\omega t} + k(x + \lambda') - \cancel{\varphi_0} &= 2\pi, \\ -\cancel{kx} + \cancel{kx} + k\lambda' &= 2\pi, \\ k\lambda' &= 2\pi. \end{aligned}$$

В итоге мы получили связь волнового числа с длиной волны (по первому определению):

$$k = \frac{2\pi}{\lambda'}$$

Вспомнив только что полученное выражение, связывающее волновое число и фазовую скорость, получаем связь фазовой скорости, волнового числа и длины волны-1 (λ'), всё вместе:

$$v_\phi = \frac{\omega}{k} \Rightarrow k = \frac{\omega}{v_\phi} = \frac{2\pi}{\lambda'}$$

По второму определению. *Длина волны* – расстояние, которое проходит волна за 1 период колебаний T . Обозначим на данном этапе её, как λ'' .

Для начала напомним известные нам из колебаний выражения, связывающие период, частоту и циклическую частоту:

$$\begin{aligned} \omega &= 2\pi\nu, \\ T &= \frac{1}{\nu} = \frac{2\pi}{\omega}. \end{aligned}$$

Расстояние, пройденное волной за один период колебаний, будет равно периоду T , умноженному на скорость волны (**внимание, на скорость распространения, а не на фазовую скорость!**):

$$\lambda'' = \nu T = \frac{\nu}{\omega} = \frac{2\pi\nu}{\omega}.$$

Запишем это выражение в виде, приведённом нами ранее, для длины волны по определению 1 (λ'):

$$\begin{aligned} \frac{\lambda''}{2\pi} &= \frac{\nu}{\omega}, \\ \frac{\omega}{\nu} &= \frac{2\pi}{\lambda''}. \end{aligned}$$

Обратите внимание, хотя эти два выражения формально и совпадают, пока что это ни о чём нам не говорит. Первое из них связывает фазовую скорость и длину волны по определению 1 (λ'), второе – скорость распространения и длину волны по определению 2 (λ'').

Чтобы показать эквивалентность двух определений длины волны, рассмотрим *скорость распространения волны* и задержка фазы колебаний волны в точке, находящейся на расстоянии x от источника волны (связь длины волны-2 (λ''), скорости распространения v и волнового числа k). Фаза в точке, находящейся на расстоянии x от источника волны, будет запаздывать относительно фазы колебаний в исходной точке ровно на столько, сколько волна шла от источника до рассматриваемой нами точки – обозначим это промежуток времени Δt :

$$\varphi(0, t) = \varphi(x, t - \Delta t).$$

Учитывая, что скорость распространения волны (в случае её равномерного движения) будет определяться по формуле

$$v = \frac{\Delta x}{\Delta t},$$

получим выражение для расстояния, пройденного волной за этот период:

$$\Delta x = v \cdot \Delta t.$$

Считая, что источник волны расположен в точке с координатой 0 , получаем требуемую нам задержку по времени фазы колебаний:

$$\Delta x = x - 0 = v \cdot \Delta t,$$

$$x = v \cdot \Delta t \Rightarrow \Delta t = \frac{x}{v}.$$

Если считать, что в момент времени 0 фаза колебаний в исходной точке (точки, откуда распространялась волна) имела следующий вид:

$$\varphi(0) = \omega t + \varphi_0,$$

получим выражение для фазы в точке, находящейся на расстоянии x от источника волны:

$$\varphi(x) = \omega(t - \Delta t) + \varphi_0 = \omega\left(t - \frac{x}{v}\right) + \varphi_0 = \omega t - \frac{\omega}{v}x + \varphi_0.$$

Сравнивая это выражение с выражением для фазы волны, приходим к выводу о том, как связано волновое число со скоростью распространения монохроматической волны:

$$\left. \begin{array}{l} \varphi = \omega t - \frac{\omega}{v}x + \varphi_0 \\ \varphi = \omega t - kx + \varphi_0 \end{array} \right\} \Rightarrow k = \frac{\omega}{v} = \frac{2\pi}{\lambda''}$$

Связь скорости распространения и фазовой скорости для монохроматической волны, равенство *длины волны-1* и *длины волны-2*. В итоге мы получили два одинаковых выражения для одного и того же параметра в уравнении монохроматической волны – волнового числа k , одно через фазовую скорость и длину волны по *определению 1* (λ'), другое через скорость распространения волны и длину волны по *определению 2* (λ''):

$$\left. \begin{aligned} k &= \frac{\omega}{v_{\phi}} = \frac{2\pi}{\lambda'} \\ k &= \frac{\omega}{v} = \frac{2\pi}{\lambda''} \end{aligned} \right\} \Rightarrow \begin{aligned} \lambda' &= \lambda'' \\ v &= v_{\phi} \end{aligned}$$

Выводы, который мы можем сделать из этого факта:

1. Длина волны по определению 1 и по определению 2 будут задавать одну и ту же величину:

$$\lambda' = \lambda''.$$

2. Скорость распространения для монохроматической волны будет совпадать с фазовой скоростью волны:

$$v = v_{\phi}.$$

3. За основное соотношение, определяющее связь волнового числа, циклической частоты, скорости (вообще говоря, фазовой скорости) и длины волны мы примем следующее двойное выражение:

$$k = \frac{\omega}{v} = \frac{2\pi}{\lambda}$$

Поясним последние выводы «на пальца». Токи, находящиеся на расстоянии, которое проходит волна (фронт волны) за один период будут колебаться в одной фазе. Это очевидно: к тому моменту, как волна дошла от первой точки до второй, и та начинает колебательный процесс от состояния равновесия, первая точка уже вернулась в состояние равновесия и начитает следующий цикл колебательного процесса также из положения равновесия. Так что эти процессы будут синхронный. Из этого следует два вывода - во-первых оба определения длины волны будут совпадать, длина волны, определенная, как наименьшее расстояние между точками, колеблющимися в одной фазе и определенная, как расстояние, пройденное волной (монохроматической волной) за один период колебаний, будет одна и та же величина. С другой стороны, за один период колебаний волна (фронт волны) проходит расстояние, равное длине волны. Это же расстояние проходит и гребень волны - если гребень волны в начальный момент находится в первой точке (фаза $\frac{\pi}{2}$, если уравнение волны записано через *cos*), то через период этот гребень окажется во второй точке, так как там фаза так же будет равна $\frac{\pi}{2}$. Из этого следует, что скорость распространения волны и фазовая скорость для монохроматической волны будут совпадать.

2.2.2. Полихромная волна

(волна, как процесс распространение возмущения произвольной формы)

Полихромная волна, как спектр монохроматических волн

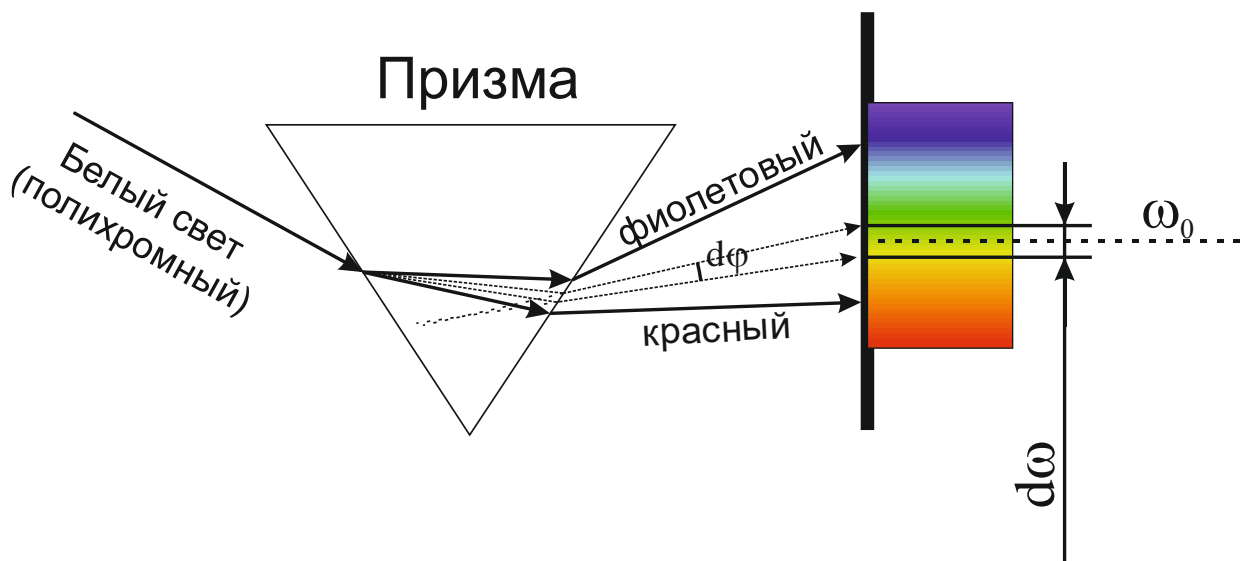


Рисунок 2.9

Разложение света (как электромагнитной волны) в спектр

Теперь рассмотрим волну, как процесс распространения возмущения произвольной формы. Эту волну всегда можно «разложить в спектр», то есть представить как сумму бесконечного числа монохроматических волн. Физически это можно продемонстрировать на примере разложения в спектр света, как электромагнитной волны. Пусть, скажем, луч белого света проходит через стеклянную призму. На экране, с другой стороны, от призмы мы увидим «радугу». Каждый бесконечно малый по ширине участок этой радуги будет монохроматической волной. Конечно, мы всё равно не получим строго монохроматическую волну в этом случае – в пределах любого малого угла величиной $d\varphi$ частота света будет меняться в диапазоне частот $d\omega$ ($\varphi \in \left[\varphi_0 - \frac{d\varphi}{2}; \varphi_0 + \frac{d\varphi}{2} \right], \omega \in \left[\omega_0 - \frac{d\omega}{2}; \omega_0 + \frac{d\omega}{2} \right]$). Но строго в одном направлении, под строго определённым углом будет распространяться строго монохроматическая волна. К тому же, в пределах этого диапазона частот $d\omega$ приближённо (с точностью до некоторого «фонового» излучения) волну можно принять за монохроматическую волну с частотой ω_0 . Обо всём этом мы поговорим немного ниже.

Подойдем к тому же вопросу с математической точки зрения. Любую (даже неперiodическую) функцию можно «разводить в интеграл Фурье», то есть представить, как бесконечную сумму (точнее, интеграл) от экспонент с мнимым аргументом (а именно так представляются колебания и волны в комплексном виде) и амплитудой, зависящей от частоты (которая, собственно, и называется в математике спектром функции).

И так, волновое уравнение (ещё раз):

$$\frac{\partial^2 \xi}{\partial x^2} = \frac{1}{v^2} \frac{\partial^2 \xi}{\partial t^2}$$

$$\Delta \xi = \frac{1}{v^2} \frac{\partial^2 \xi}{\partial t^2}$$

$$\Delta = \nabla^2 = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2}$$

Любая волна (с точки зрения *математического* определения) есть решение этого уравнения. Рассмотрим его (*решение волнового уравнения*). и переход к волнам, движущимся лишь вперёд (волна, движущаяся назад – отрицательное время t или отрицательное x)

$$\xi = f\left(t \mp \frac{x}{v}\right).$$

Причём, знаку « \rightarrow » соответствует волна, движущаяся вперёд. Знак « $+$ » соответствует волне, движущейся назад, в отрицательном направлении оси x .

Попытаемся избавиться от знака « $+$ » в этом выражении. Он? Как мы только что заметили, соответствует волне, движущейся «назад», в обратном направлении. Обычно так записывают уравнение для волны, отразившейся от препятствия. Для начала введём новый параметр τ' и перейдём от функции двух переменных к функции одной переменной. Переменная τ' определена у нас недостаточно точно за счёт именно этого знака « \mp »:

$$\tau' := t \mp \frac{x}{v} \Rightarrow \xi = f(\tau').$$

Теперь определим переменную τ следующим образом:

$$\tau := t - \frac{x}{v}.$$

Тогда при положительных значениях t и x эта переменная будет задавать волну, распространяющуюся вперёд:

$$\begin{cases} \tau > 0 \\ x > 0 \end{cases} \Rightarrow \tau' = \tau = t - \frac{x}{v}.$$

А, вот, при положительных t и отрицательных x

$$\begin{cases} t > 0 \\ x < 0 \end{cases} \Rightarrow \tau' = \tau(t, -x) = t - \frac{-x}{v} = t + \frac{x}{v},$$

либо же отрицательных t и положительных x

$$\begin{cases} t < 0 \\ x > 0 \end{cases} \Rightarrow \tau' = \tau(-t, x) = -t - \frac{x}{v} = -\left(t + \frac{x}{v}\right)$$

эта переменная τ будет задавать волну, распространяющуюся навстречу, назад. В любом случае, перейдя от переменных t и положительных x к переменной τ мы сможем пробежать все интересующие нас значения аргументов.

И так, представим решение нашего уравнения (на время), как функцию 1 -ого аргумента τ .

$$\xi = f(\tau).$$

Рассмотрим преобразование Фурье. Обратное преобразование Фурье позволяет представить произвольную функцию, как интеграл («бесконечную сумму») по некоему параметру ω от мнимых экспонент с некими специальным образом подобранными коэффициентами (зависящими от этого самого параметра ω):

$$f(\tau) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \hat{A}(\omega) e^{i\omega\tau} d\omega \quad (2.13)$$

Прямое преобразование Фурье как раз и позволяет определить эти самые коэффициенты, которые, кстати, называются *спектром функции*:

$$\hat{A}(\omega) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(\tau) e^{i\omega\tau} d\tau \quad (2.14)$$

(Этот интеграл называется *обратным преобразованием Фурье*).

Экспонента под интегралом (2.13) с нашим новым (введённым нами) параметром τ будет задавать переменную часть волны (зависимость от времени и координаты) в разложении волны в спектр:

$$e^{i\omega\tau} = e^{i\omega\left(t - \frac{x}{v}\right)} = e^{i\left(\omega t - \frac{\omega}{v}x\right)} = e^{i(\omega t - k(\omega)x)}.$$

Комплексная же амплитуда задаст набор (*спектр*) амплитуд и начальных фаз волны в зависимости от частоты (при разложении в спектр):

$$\hat{A}(\omega) e^{i\omega\tau} = A(\omega) e^{i(\omega t - k(\omega)x + \varphi_0(\omega))}.$$

Учитывая, что нас будут интересовать только положительные значения параметра τ , мы можем ограничиться в нашем представлении искомой функции (той, что на самом деле является решением волнового уравнения) только положительной частью спектра:

$$\tau < 0 \Rightarrow f(\tau) \equiv 0 \Rightarrow$$

$$\hat{A}(\omega) = \int_0^{+\infty} f(\tau) e^{i\omega\tau} d\tau, \quad \omega \geq 0,$$

$$\hat{A}(\omega) = 0, \quad \omega < 0,$$

$$f(\tau) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{+\infty} \hat{A}(\omega) e^{i\omega\tau} d\omega.$$

А теперь представим наш комплекснозначный коэффициент (спектр функции), как комплекснозначную амплитуду волны – комплексное число, действительная часть которого задаёт амплитуду волны, а мнимая – начальную фазу:

$$\hat{A}(\omega) = A(\omega) e^{i\varphi_0(\omega)}.$$

И так, разложение нашей полихромной волны (*процесса распространения произвольных возмущений*) в спектр (*в последовательность монохроматических волн*) будет иметь вид:

$$f(\tau) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{+\infty} \hat{A}(\omega) e^{i\omega\tau} d\omega$$

где

$$\hat{A}(\omega) = A(\omega) e^{i\varphi_0(\omega)}$$

– комплексная амплитуда (амплитуда A начальная фаза), зависящая от частоты спектральной составляющей.

В итоге наша *произвольная функция времени и координаты* будет задаваться следующим *интегралом от её спектра*:

$$\xi(t, x) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{+\infty} \xi_\omega(t, x) d\omega.$$

где

$$\xi_\omega(t, x) = A(\omega) e^{i(\omega t - k(\omega)x + \varphi_0(\omega))}$$

– одна спектральная составляющая нашей волны (спектральная составляющая волны с циклической частотой ω).

В случае необходимости, через формулу Эйлера

$$e^{i\varphi} = \cos \varphi + i \sin \varphi$$

$$Ae^{i\varphi} = A \cos \varphi + i A \sin \varphi$$

можем перейти к привычному действительному представлению нашей волны (к записи через *cos()* или *sin()*):

$$\begin{aligned} & A(\omega) e^{i(\omega t - k(\omega)x + \varphi_0(\omega))} = \\ & = A(\omega) \cos(\omega t - k(\omega)x + \varphi_0(\omega)) + i A \sin(\omega t - k(\omega)x + \varphi_0(\omega)) \\ & \xi_\omega^{\text{Re}}(t, x) = \text{Re } \xi_\omega(t, x) = \\ & = \text{Re}(A(\omega) \cos(\omega t - k(\omega)x + \varphi_0(\omega)) + i A \sin(\omega t - k(\omega)x + \varphi_0(\omega))) = \\ & = A(\omega) \cos(\omega t - k(\omega)x + \varphi_0(\omega)) \end{aligned}$$

Тогда:

$$\xi_\omega^{\text{Re}} = A_\omega \cos(\omega t - k_\omega x + \varphi_{0\omega}).$$

Окончательно мы получили разложение нашей произвольной волны в спектр:

$$\xi_\omega(t, x) = A(\omega) e^{i(\omega t - k(\omega)x + \varphi_0(\omega))},$$

где

$$\begin{aligned} A(\omega) e^{i\varphi_0(\omega)} = \hat{A}(\omega) &= \int_0^{+\infty} \xi(\tau) e^{i\omega\tau} d\tau, \\ \tau &= t - \frac{x}{v}. \end{aligned}$$

В конце рассуждений заметим, что надо отдавать отчёт в том, что, раскладывая полихромную волну в спектр математически (*как только что было продемонстрировано*) или физически (скажем, пропуская белый свет через призму и получая радугу), мы реально всё же *не можем выделить отдельно какую-либо монохроматическую волну*. О монохроматической волне, составляющей спектра (*одной монохроматической волне в составе спектра*) мы можем говорить в следующем смысле:

1. Любую немонахроматическую (произвольную) волну мы всегда можем представить, как бесконечную сумму монохроматических волн, даже не подвергая её разложению в спектр «физически» (не пропуская, как, скажем, свет через призму и т.д.). При этом, если, к примеру, в данной точки пространства будут усиливаться все монохроматические составляющие спектра, то мы будем наблюдать усиление интенсивности всей нашей волны в данной точке (это же утверждение справедливо не только для усиления/ослабления интенсивности волны, но и для любых процессов, связанных с поведением *отдельных монохроматических волн*). Если все монохроматические составляющие будут испытывать ослабления, будет наблюдаться ослабление исходной (результатирующей волны). И т.д.
2. «Радуга» – свет, прошедший через призму, интерференция в тонких плёнках (полосы равной толщины) и т.д. Бесконечный набор монохроматических волн, преходящих одна в другую и существующих совместно...
3. Квазимонохроматическая волна. Узкая полоска, вырезанная из спектра, где частота всё же изменяется, но незначительно и которую мы можем представить, как «строгую монохроматическую волну плюс некоторая флуктуация (некоторый «фон»).

Ещё пару слов скажем о квазимонохроматической волне. На Рисунок 2.10 поставим за призмой диафрагму, которая будет пропускать узкую полоску спектра (в пределах некоторого угла $\Delta\varphi$).

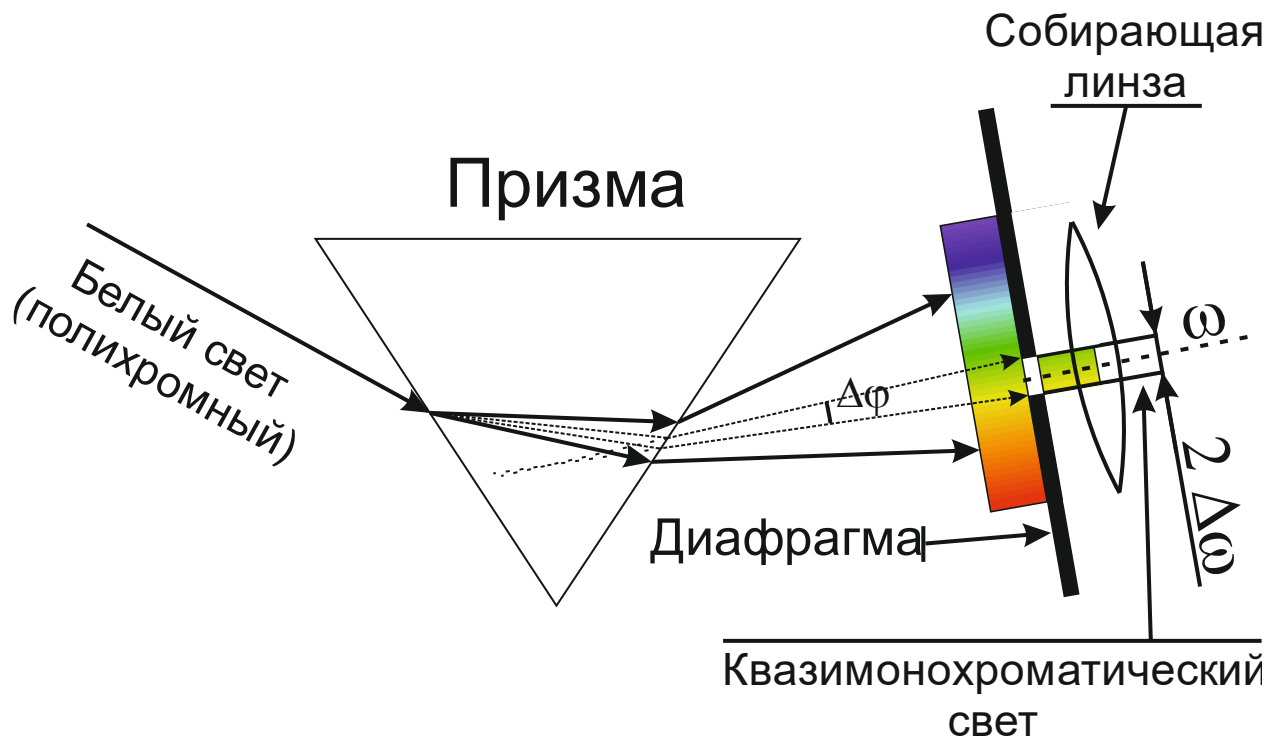


Рисунок 2.10

Получение квазимонохроматической волны в результате разложения света в спектр

Пусть эта диафрагма вырезает с спектре излучение с частотой $\omega \pm \Delta\omega$. То есть, частота излучения ω' , прошедшего за диафрагму будет меняться в пределах:

$$\omega' \in [\omega - \Delta\omega; \omega + \Delta\omega].$$

Далее поставим собирающую линзу, которая объединит все лучи этого кусочка спектра в один луч.

Для различных частот этого луча (разложение в спектр с математической точки зрения) мы можем записать уравнение монохроматической волны

$$\xi_{\omega'} = A_{\omega'} \cos(\omega' t - k_{\omega'} x + \varphi_{0\omega'}),$$

либо в другом виде, как

$$\xi_{\omega'} = A_{\omega'} \cos\left(\omega' \left(t - \frac{x}{v}\right) + \varphi_{0\omega'}\right),$$

где

$$\begin{aligned} \omega' &= \omega + d\omega, \\ d\omega &\in [-\Delta\omega; +\Delta\omega]. \end{aligned}$$

Тогда, подставляя значение частоты ω' , получим

$$\xi_{\omega+d\omega} = A_{\omega+d\omega} \cos\left((\omega + d\omega) \left(t - \frac{x}{v}\right) + \varphi_{0\omega+d\omega}\right).$$

Раскроем скобки

$$\xi_{\omega+d\omega} = A_{\omega+d\omega} \cos\left(\omega \left(t - \frac{x}{v}\right) + d\omega \left(t - \frac{x}{v}\right) + \varphi_{0\omega+d\omega}\right)$$

И сгруппируем слагаемые, образующие фазу

$$\xi_{\omega+d\omega} = A_{\omega+d\omega} \cos \left(\left(\omega \left(t - \frac{x}{v} \right) + \varphi_0 \right) + \left(d\omega \left(t - \frac{x}{v} \right) + \varphi'_0 \right) \right),$$

где

$$\varphi_{0\omega+d\omega} = \varphi_0 + \varphi'_0.$$

Воспользуемся тригонометрической формулой косинуса суммы двух углов:

$$\cos(\alpha + \beta) = \cos(\alpha)\cos(\beta) - \sin(\alpha)\sin(\beta).$$

Тогда имеем:

$$\begin{aligned} & A_{\omega+d\omega} \cos \left(\left(\omega \left(t - \frac{x}{v} \right) + \varphi_0 \right) + \left(d\omega \left(t - \frac{x}{v} \right) + \varphi'_0 \right) \right) = \\ & = A_{\omega+d\omega} \cos \left(\omega \left(t - \frac{x}{v} \right) + \varphi_0 \right) \cos \left(d\omega \left(t - \frac{x}{v} \right) + \varphi'_0 \right) - \\ & - A_{\omega+d\omega} \sin \left(\omega \left(t - \frac{x}{v} \right) + \varphi_0 \right) \sin \left(d\omega \left(t - \frac{x}{v} \right) + \varphi'_0 \right). \end{aligned}$$

Поскольку второй сомножитель в первом слагаемом близок к единице (мы считаем, что диапазон частот в вырезанной нами части спектра мал по сравнению самой частотой ($\Delta\omega \ll \omega$), следовательно мало и приращение частоты $d\omega$), получим:

$$\begin{aligned} & d\omega \rightarrow 0 \Rightarrow \cos \left(d\omega \left(t - \frac{x}{v} \right) + \varphi'_0 \right) \rightarrow 1 \Rightarrow \\ & \Rightarrow A_{\omega+d\omega} \cos \left(\omega \left(t - \frac{x}{v} \right) + \varphi_0 \right) \cos \left(d\omega \left(t - \frac{x}{v} \right) + \varphi'_0 \right) \approx A_{\omega+d\omega} \cos \left(\omega \left(t - \frac{x}{v} \right) + \varphi_0 \right). \end{aligned}$$

Из этих же соображений можно считать, что второе слагаемое, если не стремится к нулю, то, по крайней мере, мало. В конце концов, если начальная фаза не меняется в зависимости от частоты (ну а почему она должна меняться?), φ'_0 можно выбрать равным нулю. Тогда получим:

$$\begin{aligned} & d\omega \rightarrow 0 \Rightarrow \sin \left(d\omega \left(t - \frac{x}{v} \right) + \varphi'_0 \right) \rightarrow 0 \Rightarrow \\ & \Rightarrow A_{\omega+d\omega} \sin \left(\omega \left(t - \frac{x}{v} \right) + \varphi_0 \right) \sin \left(d\omega \left(t - \frac{x}{v} \right) + \varphi'_0 \right) \ll A_{\omega+d\omega} \cos \left(\omega \left(t - \frac{x}{v} \right) + \varphi_0 \right). \end{aligned}$$

В результате выражение для монохроматической составляющей нашей квазимонохроматической волны примет вид:

$$\xi_{\omega+d\omega} = A_{\omega+d\omega} \cos \left(\omega \left(t - \frac{x}{v} \right) + \varphi_0 \right) + \delta(\omega, d\omega, x, t),$$

где

$$\delta(\omega, d\omega, x, t) \ll A_{\omega+d\omega} \cos \left(\omega \left(t - \frac{x}{v} \right) + \varphi_0 \right),$$

$$\delta(\omega, d\omega, x, t) = -A_{\omega+d\omega} \sin\left(\omega\left(t - \frac{x}{v}\right) + \varphi_0\right) \sin\left(d\omega\left(t - \frac{x}{v}\right) + \varphi'_0\right).$$

Запишем снова теперь уже преобразованное выражение волны в выражении через *волновое число*:

$$\xi_{\omega+d\omega} = A_{\omega+d\omega} \cos(\omega t - kx + \varphi_0) + \delta(\omega, d\omega, x, t),$$

где

$$k = \frac{\omega}{v}.$$

А теперь сложим все монохроматические составляющие нашей квазимонохроматической волны вместе, чтобы понять, что у нас получилось в результате:

$$\begin{aligned} \xi_{\omega} &= \sum_{d\omega=-\Delta\omega}^{+\Delta\omega} \xi_{\omega+d\omega} = \sum_{d\omega=-\Delta\omega}^{+\Delta\omega} \left(A_{\omega+d\omega} \cos(\omega t - kx + \varphi_0) + \delta(\omega, d\omega, x, t) \right) = \\ &= A_{\Sigma} \cos(\omega t - kx + \varphi_0) + \delta_{\Sigma}(\omega, x, t), \end{aligned}$$

где

$$\begin{aligned} A_{\Sigma} &= \sum_{d\omega=-\Delta\omega}^{+\Delta\omega} A_{\omega+d\omega}, \\ \delta_{\Sigma}(\omega, x, t) &= \sum_{d\omega=-\Delta\omega}^{+\Delta\omega} \delta(\omega, d\omega, x, t). \end{aligned}$$

В следствии свойства линейности суммы, мы представили выражение, как сумму двух бесконечных сумм (частоты меняются непрерывно, поэтому суммы будут бесконечными) и вынести из-под первой суммы постоянный множитель – *косинус с постоянной фазой*.

Тогда окончательно наше выражение для *квазимонохроматического луча* примет вид:

$$\xi_{\omega} = A \cos(\omega t - kx + \varphi_0) + \delta(\omega, x, t),$$

где

$$\delta(\omega, x, t) \ll A \cos(\omega t - kx + \varphi_0).$$

Вообще говоря, речь, конечно, должна идти не о бесконечной сумме отдельных монохроматических составляющих спектра нашего *квазимонохроматического луча*, а об интеграле по всему диапазону частот:

$$\begin{aligned} \xi_{\omega} &= \int_{-\Delta\omega}^{+\Delta\omega} \xi_{\omega+d\omega} d\omega = \int_{-\Delta\omega}^{+\Delta\omega} \cos(\omega t - kx + \varphi_0) + \delta(\omega, d\omega, x, t) d\omega = \\ &= A_j \cos(\omega t - kx + \varphi_0) + \delta_j(\omega, x, t), \end{aligned}$$

где

$$A_j = \int_{-\Delta\omega}^{+\Delta\omega} A_{\omega+d\omega} d\omega,$$

$$\delta_j(\omega, x, t) = \int_{-\Delta\omega}^{+\Delta\omega} \delta(\omega, d\omega, x, t) d\omega.$$

Или, даже, о среднеинтегральном значении:

$$\begin{aligned} \langle \xi_{\omega \pm \Delta\omega} \rangle &= \frac{\xi_\omega}{(\omega + \Delta\omega) - (\omega - \Delta\omega)} = \frac{\xi_\omega}{2\Delta\omega} = \frac{\int_{-\Delta\omega}^{+\Delta\omega} \xi_{\omega+d\omega} d\omega}{2\Delta\omega} = \\ &= A \cos(\omega t - kx + \varphi_0) + \delta(\omega, x, t), \end{aligned}$$

где

$$\begin{aligned} A &= \frac{1}{2\Delta\omega} \int_{-\Delta\omega}^{+\Delta\omega} A_{\omega+d\omega} d\omega, \\ \delta(\omega, x, t) &= \frac{1}{2\Delta\omega} \int_{-\Delta\omega}^{+\Delta\omega} \delta(\omega, d\omega, x, t) d\omega, \end{aligned}$$

из которого потом должна вычисляться интенсивность нашего луча, как функция монохроматической составляющей (об интенсивности волны, векторе Умова, плотности потока энергии будет сказано чуть ниже):

$$I = \left| \langle \vec{j} \rangle \right| = \left| \langle \omega \vec{v} \rangle \right| = \dots = f(\langle \xi_{\omega \pm \Delta\omega} \rangle).$$

$$\begin{aligned}
\xi_{\omega+\delta\omega} &= A_{\omega+d\omega} e^{(\omega+\delta\omega)\left(t-\frac{x}{v}\right)+\varphi_{0\omega+\delta\omega}} \\
\xi_{\omega+\delta\omega} &= A_{\omega+d\omega} e^{\omega\left(t-\frac{x}{v}\right)+\delta\omega\left(t-\frac{x}{v}\right)+\varphi_{0\omega}+\varphi_{0\delta\omega}} \\
\xi_{\omega+\delta\omega} &= A_{\omega+d\omega} e^{\omega\left(t-\frac{x}{v}\right)+\varphi_{0\omega}} e^{\delta\omega\left(t-\frac{x}{v}\right)+\varphi_{0\delta\omega}} \\
\xi_{[\omega\pm\Delta\omega]} &= \int_{-\Delta\omega}^{+\Delta\omega} \xi_{\omega+\delta\omega} d\omega = \int_{-\Delta\omega}^{+\Delta\omega} A_{\omega+\delta\omega} e^{i\omega\left(t-\frac{x}{v}\right)+\varphi_{0\omega}} e^{i\delta\omega\left(t-\frac{x}{v}\right)+\varphi_{0\delta\omega}} d\omega = \\
\xi_{[\omega\pm\Delta\omega]} &= \int_{-\Delta\omega}^{+\Delta\omega} A_{\omega} e^{i\omega\left(t-\frac{x}{v}\right)+\varphi_{0\omega}} e^{i\delta\omega\left(t-\frac{x}{v}\right)} d\delta\omega = A_{\omega} e^{i\omega\left(t-\frac{x}{v}\right)+\varphi_{0\omega}} \int_{-\Delta\omega}^{+\Delta\omega} e^{i\delta\omega\left(t-\frac{x}{v}\right)} d\delta\omega = \\
&= A_{\omega} e^{i\omega\left(t-\frac{x}{v}\right)+\varphi_{0\omega}} \frac{\int_{-\Delta\omega}^{+\Delta\omega} e^{i\delta\omega\left(t-\frac{x}{v}\right)} d\left(i\delta\omega\left(t-\frac{x}{v}\right)\right)}{i\left(t-\frac{x}{v}\right)} = A_{\omega} e^{i\omega\left(t-\frac{x}{v}\right)+\varphi_{0\omega}} \frac{e^{i\Delta\omega\left(t-\frac{x}{v}\right)} - e^{-i\Delta\omega\left(t-\frac{x}{v}\right)}}{i\left(t-\frac{x}{v}\right)} = \\
&= A_{\omega} e^{i\omega\left(t-\frac{x}{v}\right)+\varphi_{0\omega}} \frac{\text{sh}\left(i\Delta\omega\left(t-\frac{x}{v}\right)\right)}{i\left(t-\frac{x}{v}\right)} = \hat{A}_{\omega} e^{i\omega\left(t-\frac{x}{v}\right)} \frac{\text{sh}\left(i\Delta\omega\left(t-\frac{x}{v}\right)\right)}{i\left(t-\frac{x}{v}\right)} \\
\xi_{[\omega\pm\Delta\omega]} &= \hat{A}_{\omega} e^{i\omega\left(t-\frac{x}{v}\right)} \frac{\text{sh}\left(i\Delta\omega\left(t-\frac{x}{v}\right)\right)}{i\left(t-\frac{x}{v}\right)} \\
\xi_{[\omega\pm\Delta\omega]} &= \xi_{\omega} \frac{\text{sh}\left(i\Delta\omega\left(t-\frac{x}{v}\right)\right)}{i\left(t-\frac{x}{v}\right)} \\
\langle \xi_{\omega\pm\Delta\omega} \rangle &= A_{\omega} e^{i\omega\left(t-\frac{x}{v}\right)+\varphi_{0\omega}} \int_{-\Delta\omega}^{+\Delta\omega} \cos\left(\delta\omega\left(t-\frac{x}{v}\right)\right) d\delta\omega = \\
&= \frac{2\sin\left(\Delta\omega\left(t-\frac{x}{v}\right)\right)}{\left(t-\frac{x}{v}\right)} = \frac{2\sin\left(\Delta\omega\left(t-\frac{x}{v}\right)\right)}{\left(t-\frac{x}{v}\right)}
\end{aligned}$$

$$\int e^{iax} dx$$

$$e^{iax} x$$

$$\int_{-\Delta\omega}^{\Delta\omega} e^{iax} dx = 2e^{iax} \Delta\omega$$

Но, как мы видим, сути дела это не меняет. В любом случае, полученный таким образом луч (путём «вырезания» из общего спектра узкой полоски частот) может быть представлен, как *строго монохроматическая волна*, плюс некоторая небольшая добавка, которую можно воспринимать, как *фон* или *флуктуации* на фоне *монохроматической волны*.

Замечание. Отдельно отметим, подобные рассуждения (п.п. 1, 2, 3) справедливы не только для света или произвольной электромагнитной волны, но и для *любого волнового процесса* (вместо призмы может фигурировать некое другое устройство, раскладывающее данную волну в спектр).

Вывод. Мы будем строить физическую теорию для *монохроматической волны*. В случае более сложных волновых процессов мы будем представлять их тем или иным образом, как *спектр* (бесконечный ряд монохроматических волн). Общую же картину для процессов происходящих с произвольной (*немонохроматической*) волной мы будем сводить к сумме результатов, полученных для всех её составляющих в её спектре (всех монохроматических вол, составляющих её спектр).

$$\begin{aligned}
 & \cos(\omega\xi + \varphi_{01}) + \cos(\omega\xi + \varphi_{02}) = \\
 & = 2\cos\left(\frac{(\omega\xi + \varphi_{01}) + (\omega\xi + \varphi_{02})}{2}\right)\cos\left(\frac{(\omega\xi + \varphi_{01}) - (\omega\xi + \varphi_{02})}{2}\right) = \\
 & = 2\cos\left(\frac{\omega\xi + \varphi_{01} + \omega\xi + \varphi_{02}}{2}\right)\cos\left(\frac{\cancel{\omega\xi} + \varphi_{01} - \cancel{\omega\xi} - \varphi_{02}}{2}\right) = \\
 & = 2\cos\left(\frac{2\omega\xi + \varphi_{01} + \varphi_{02}}{2}\right)\cos\left(\frac{\cancel{\omega\xi} + \varphi_{01} - \cancel{\omega\xi} - \varphi_{02}}{2}\right) = \\
 & = 2\cos\left(\omega\xi + \frac{\varphi_{01} + \varphi_{02}}{2}\right)\cos\left(\frac{\varphi_{01} - \varphi_{02}}{2}\right) \dots \\
 & \frac{\int_{-\Delta\omega}^{+\Delta\omega} \xi_{\omega+d\omega} d\omega}{2\Delta\omega} = \frac{\int_{-\Delta\omega}^{+\Delta\omega} \cos(\omega\xi + \varphi_0(\omega)) d\omega}{2\Delta\omega} = \frac{\int_{-\Delta\omega}^{+\Delta\omega} \cos(\omega\xi + \varphi_{01}) d\omega}{2\Delta\omega} =
 \end{aligned}$$

Фазовая и групповая скорость, дисперсия

Рассмотрим произвольную волны, как решение волнового уравнения (дифференциального уравнения волны), имеющего следующий вид:

$$\xi = f\left(t - \frac{x}{v}\right)$$

Заходим себе вопрос – будет ли волна распространяться с той же скоростью, что и фаза (будет ли скорость движения волнового фронта по-прежнему равна фазовой скорости)?

$$v = v_{\phi} = \frac{\omega}{k_{\omega}}$$

Ответ очевиден – если фазовая скорость не зависит от частоты, то да. Поскольку все составляющие данную волну монохроматические волны имеют одну и ту же фазовую скорость и сами будут распространяться именно с этой скоростью, с этой же скоростью будет распространяться и волна целиком. Но что, если фазовая скорость зависит от частоты и каждая монохроматическая волна будет иметь свою скорость распространения? С какой скоростью будет распространяться волна целиком? В этом случае в качестве скорости распространения волны будет выступать «групповая скорость» – скорость движения волнового пакета на фоне бесконечной монохроматической волны.

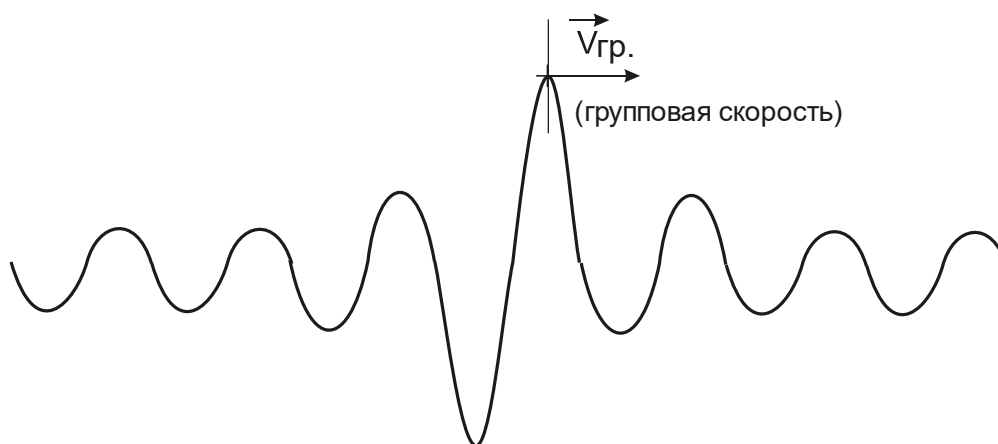


Рисунок 2.11
Волновой пакет, определяющий групповую скорость

Представим себе, что монохроматическая волна – действительно бесконечный косинус, никто не помнит, когда она началась и не знает, когда закончится. Тогда с движением отдельных гребней волны уже нельзя связать ни перенос энергии, ни перенос информации, это просто движение неких математических точек, описываемых неким математическим выражением. Но вот если на фоне этой волны запустить «всплеск» (группу волн, волновой пакет), то скорость его движения уже будет описывать и перенос энергии, и передачу информации. И именно эту скорость мы и назовем групповой. Именно она и будет отвечать за скорость распространения волны. Групповая скорость будет определяться формулой

$$v_{gp.} = \frac{d\omega}{dk},$$

в отличие от фазовой скорости, характерной для каждой монохроматической волны, в составе данной волны, которая, напомним, определяется по формуле:

$$v_{\phi} = \frac{\omega}{k}$$

Ассоциативно такое различие можно пояснить на следующем примере. В случае равномерного движения за скорость мы вполне можем принять путь, пройденный телом, делённый на время.

$$x = x(t),$$

$$v = \text{const} \Rightarrow v = \frac{x}{t}.$$

Какой бы интервал времени и пройденный за это время путь мы не взяли бы, мы получим одну и ту же величину. Но, если скорость изменяется со временем, мы вынуждены перейти к производной и делить бесконечно малый путь на бесконечно малый отрезок времени, затраченный на его прохождение:

$$v \neq \text{const}, v = v(t) \Rightarrow v = \frac{dx}{dt}$$

В итоге имеем следующие соотношения между скоростью распространения волны (скоростью движения волнового фронта), фазовой и групповой скоростью волны:

$$\begin{cases} v_\phi = \text{const}, v_\phi \neq \text{var}(\omega) & \Rightarrow v = v_\phi = v_{gp.} = \frac{\omega}{k} \\ v_\phi = v_\phi(\omega), v_\phi \neq \text{const}(\omega) & \Rightarrow v \neq v_\phi, v = v_{gp.} = \frac{d\omega}{dk} \end{cases}$$

Равенство фазовой и групповой скорости в случае, если первая не зависит от частоты можно получить чисто математически:

$$v_{gp.} = \frac{d\omega}{dk} = \frac{d\omega}{d(\omega/v_\phi)} = \frac{\cancel{d\omega}}{1/v_\phi \cdot \cancel{d\omega}} = v_\phi.$$

Явление зависимости фазовой скорости волны от частоты, как мы скажем ниже, называется дисперсией. В случае, если дисперсия не наблюдается, групповая скорость совпадает с фазовой.

Длина волны в общем случае (для полихромной волны)

Вернёмся к волновому числу, длине волны и фазовой скорости. Теперь для полихромной (*не монохроматической*) волны за волновое число мы будем принимать его выражение через длину волны $\left(\frac{2\pi}{\lambda}\right)$. Длину волны мы будем воспринимать, как альтернативный частоте параметр, по которому мы будем раскладывать нашу волну в спектр $\left(\lambda = \frac{2\pi \cdot \omega}{v_\phi}\right)$. Саму же фазовую скорость мы будем считать функцией частоты, которая определяется физическими свойствами каждой конкретной волны.

За длину волны принимаем длину волны по первому определению:

$$\lambda = \lambda'$$

– минимальное расстояние между точками, колеблющимися в одной фазе. Из этого определения по крайней мере, понятно, что речь может идти о монохроматической составляющей полихромной волны.

$$\lambda = \frac{2\pi}{k} = \frac{2\pi v_\phi}{\omega}$$

– это двойное соотношение будет задавать связь между длиной волны, волновым числом, фазовой скоростью и циклической частотой.

В итоге:

$$\begin{cases} k = \frac{2\pi}{\lambda} & (1) \\ \lambda = \frac{2\pi v_{\phi}}{\omega} & (2) \\ v_{\phi} = v_{\phi}(\omega) & (3) \end{cases}$$

(1)– определение волнового числа,

(2)– определение длины волны,

(3)– фазовая скорости определяется из физических свойств самой волны.

Скажем, для света фазовая скорость будет определяться диэлектрической проницаемостью среды для колебаний каждой конкретной частоты. Это следует из определения показателя преломления и выражения скорости света через фундаментальные константы и параметры среды:

$$n = \frac{c}{v_{\phi}} \approx \sqrt{\varepsilon}$$

$$\begin{cases} k = \frac{2\pi}{\lambda} \\ \lambda = \frac{2\pi v_{\phi}}{\omega} \\ v_{\phi} = \frac{c}{n} \end{cases}$$

Таблица 2.1 Параметры монохроматической и полихромной волн

	Формула / обозначение	Монохроматическая волна	Полихромная (немонохроматическая) волна
Фазовая скорость	$v_{\phi} = \frac{\omega}{k}$	Является объективной характеристикой (параметром) данной волны	В общем случае, есть функция частоты
Групповая скорость	$v_{gp} = \frac{d\omega}{dk}$	– (отсутствует, как понятие для данного класса волн)	Скорость волнового пакета на фоне стационарной волны
Скорость распространения	v	Совпадает с фазовой скоростью (это можно доказать)	Совпадает с групповой скоростью (это можно доказать)
Длина Волны	$\lambda = \frac{2\pi}{k} = \frac{2\pi v_{\phi}}{\omega}$	Является объективной характеристикой (параметром) данной волны	Один из параметров (наряду с частотой) для разложения волны в спектр

2.3. Групповая скорость – вывод формулы

Выведем зависимость, *определяющую групповую скорость*.

Рассмотрим волну, как сумму бесконечного числа монохроматических волн разных частот. Пусть фазовая скорость на различных частотах не одинаковая. Определим скорость распространения такой волны. За скорость распространения такой волны принимаем скорость распространения всплеска на фоне общих колебаний.

Рассмотрим простейший вывод – распространение периодического изменения амплитуды (*биений*), образующихся при сложении двух волн близких частот и одинаковых амплитуд:

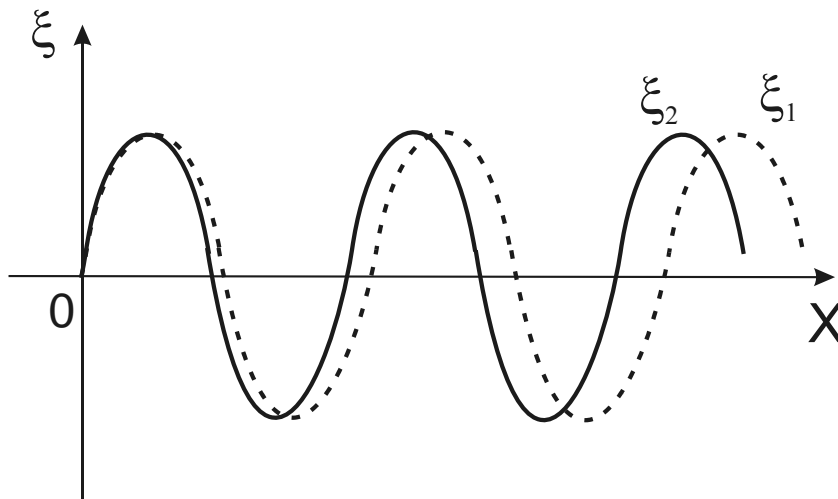


Рисунок 2.12

Две монохроматические волны близких частот

Результат сложения волн получаем:

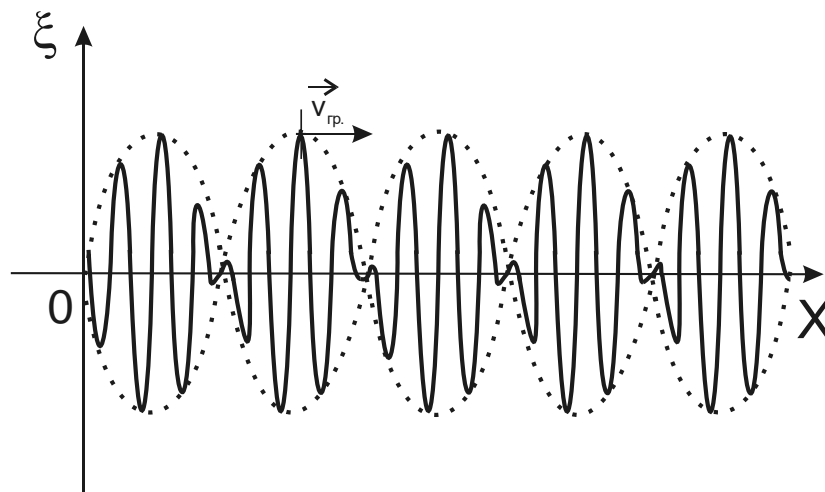


Рисунок 2.13

Результата сложения двух монохроматических волн близких частот

И так. Первая волна:

$$\xi_1 = A \cos(\omega t - kx)$$

Вторая волна с близкой, но отличающейся частотой:

$$\xi_2 = A \cos((\omega + d\omega)t - (k + dk)x)$$

$$d\omega \ll \omega, (dk \ll k)$$

Результат их сложения *группа волн*:

$$\xi = \xi_1 + \xi_2$$

Складывая волны, используем формулу для суммы двух косинусов:

$$\cos(\alpha) + \cos(\beta) = 2 \cos\left(\frac{\alpha + \beta}{2}\right) \cdot \cos\left(\frac{\alpha - \beta}{2}\right)$$

Получим:

$$\begin{aligned}
 \xi &= \xi_1 + \xi_2 = A \cos(\omega t - kx) + A \cos((\omega + d\omega)t - (k + dk)x) = \\
 &= A \left(\cos(\omega t - kx) + \cos((\omega + d\omega)t - (k + dk)x) \right) = \\
 &= 2A \cos \frac{\omega t - kx + (\omega + d\omega)t - (k + dk)x}{2} \cdot \\
 &\quad \cdot \cos \frac{\omega t - kx - (\omega + d\omega)t + (k + dk)x}{2} = \\
 &= 2A \cos \left(\omega t - kx + \frac{d\omega \cdot t}{2} - \frac{dk \cdot x}{2} \right) \cos \left(\frac{xdk}{2} - \frac{td\omega}{2} \right) = \\
 &= 2A \cos \left(\frac{xdk}{2} - \frac{td\omega}{2} \right) \cos \left(\omega t - kx + \frac{d\omega \cdot t}{2} - \frac{dk \cdot x}{2} \right) = \\
 &\quad \underbrace{2A \cos \left(\frac{xdk}{2} - \frac{td\omega}{2} \right)}_{A'} \cos \left(\omega t - kx + \frac{d\omega \cdot t}{2} - \frac{dk \cdot x}{2} \right) =,
 \end{aligned}$$

где

$$A' = 2A \cos \left(\frac{d\omega \cdot t}{2} - \frac{dk \cdot x}{2} \right)$$

– амплитуда суммарной волны; всплеск, движущийся на фоне волны.

Определим скорость распространения всплеска этой амплитуды. Для этого зафиксируем значение под косинусом (максимум всплеска, как и минимум и любая точка постоянного значения аргумента, стоящего под косинусом, в данном случае, будут двигаться с одной скоростью):

$$A' = 2A \cos \underbrace{\left(\frac{d\omega \cdot t}{2} - \frac{dk \cdot x}{2} \right)}_{\varphi'}$$

$$\varphi' = const$$

$$\frac{d\omega}{2} t - \frac{dk}{2} x = const$$

Возьмём производную по времени от этого выражения:

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{d\omega}{2} t - \frac{dk}{2} x \right) = \frac{d}{dt} (const)$$

$$\frac{d\omega}{2} \frac{dt}{dt} - \frac{dk}{2} \frac{dx}{dt} = 0 \quad \left| \cdot \frac{2}{dk} \right.$$

$$\frac{d\omega}{dk} - \frac{dx}{dt} = 0$$

$$\frac{dx}{dt} = \frac{d\omega}{dk} = v_{gp.} \text{ – групповая скорость}$$

В итоге для групповой скорости имеем:

$$v_{gp} = \frac{d\omega}{dk}$$

За *скорость переноса энергии и скорость распространения волны* мы принимаем *групповую скорость* (если речь не идет о монохроматической волне, там понятие групповой скорости отсутствует, а скорость распространения совпадает с фазовой скоростью).

2.4. Специфичные для волн процессы и явления

Волновым процессам присущ ряд специфичных явлений. Эти явления присущи волнам и только волнам. По наблюдению данных явлений можно однозначно судить, что в данном случае мы имеем дело с волновым процессом и ни чем иным. К таким явлениям относятся *интерференция* и *дифракция*. Именно они доказывают в первую очередь волновую природу света. Такое явление, как *поляризация*, также присущее только волнам, позволяет однозначно судить, является ли данная волна поперечной или продольной (*поляризация присуща всем поперечным волнам и никогда не наблюдается для продольных*). Такое явление, как *дисперсия*, также являясь чисто волновым, позволяет судить о распространении группы волн и устойчивости волновых пакетов.

Более подробно все эти явления мы будем разбирать в разделе «Волновая оптика» на конкретных примерах. Сейчас же мы познакомимся с ними в общем и целом, как с примером проявления чисто волновых свойств в процессах совершенно разной физической природы.

2.4.1. Интерференция

Df. *Интерференция* – это сложение (*наложение, взаимодействие*) двух или более волн, приводящее к устойчивой во времени картине локального усиления или ослабления интенсивности волн, т.е. увеличению или уменьшению амплитуды результирующих колебаний.

Замечание 1. *Интерференция является чисто волновым явлением, но не является явлением, свойственным только свету. Например, можно наблюдать интерференцию звука. Однако, для света это явление более наглядно.*

Замечание 2. *Интерференция не противоречит закону сохранения энергии. Интерференция – есть перераспределение во фронте волны.*

Необходимое условие наблюдения интерференции. Условие минимума и максимума.

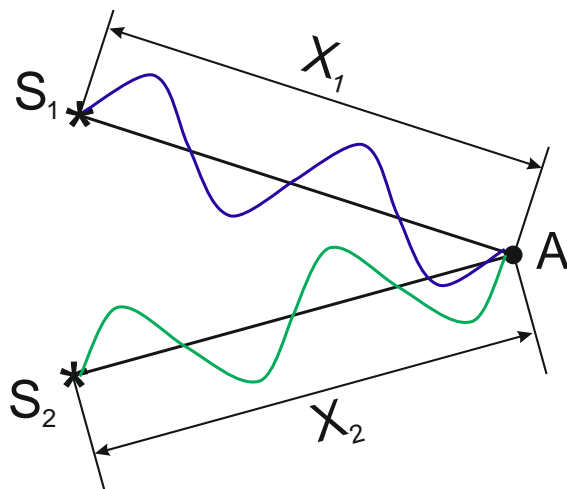


Рисунок 2.14

Интерференция двух волн от когерентных источников

Вспомним определение волны в узком смысле – *волна есть процесс распространения колебаний в пространстве с течением времени*. Пусть в некоторую точку *A* приходят колебания вместе с двумя различными волнами. Рассмотрим сложение этих колебаний в точке *A*. Как было сказано в разделе «Скалярное сложение колебаний», рассматривать сложение колебаний различной частоты просто бессмысленно (*они всё равно будут восприниматься нами, как эти дав колебания по отдельности*). Только при сложении колебаний одинаковой частоты мы получим новое колебание большей или меньшей амплитуды (*таким образом, получим усиление или ослабление интенсивности волны в данной точке пространства*). Пусть фаза этого нового колебания φ :

$$\varphi = \omega t + \varphi_0.$$

При этом:

1. $\varphi_{01} = \varphi_{02}$. – можно утверждать, что начальные фазы складываемых колебаний всегда будут равны.
2. $A_{max}: \Delta\varphi = 2k\pi$, – максимум амплитуды результирующего колебания будет отвечать разности фаз складываемых колебаний, кратной 2π .
3. $A_{min}: \Delta\varphi = \pi + 2k\pi$ – минимум амплитуды результирующего колебания будет отвечать разности фаз складываемых колебаний, кратной 2π плюс ещё π .
4. Для того чтобы сложение колебаний было скалярным, а не векторным, необходимо, чтобы колебания имели по возможности одно и то же направление.

Первое утверждение следует из фактов, которые будут излагаться несколько позже. По существу, это связано с тем, что в большинстве случаев для наблюдения интерференции мы вынуждены делить на два пучка одну и ту же волну. Утверждение (2) и (3) следуют из формулы сложения колебаний

(см. «Сложение колебаний» – «Скалярное сложение колебаний»). Утверждение (4) актуально для поперечной волны и связано с явлением поляризации, которое будет рассмотрено ниже. В случае продольной волны оно не столь важно, поскольку мы явно будем рассматривать волны распространяющиеся приблизительно в одну сторону. Следовательно и колебания в той и другой волне будут ориентированы именно туда.

Вывод 1. *Необходимое условие наблюдения интерференции – независимость от времени разности фаз. $\Delta\varphi \neq \text{var}(t)$.* Тогда минимумы и максимумы будут являться характеристиками точки пространства и не меняться со временем (разность фаз будет определяться только расстояниями, пройденными той и другой волной, см. ниже).

Вывод 2. *Для поперечных волн так же необходимо наличие близких плоскостей параллелизма для всех интерферирующих волн.* Иначе вместо интерференции мы получим переход от одного вида поляризации к другому.

Оба условия будут рассматриваться ниже, вернемся к условию минимума и максимума. Пусть фаза колебаний, пришедших с каждой волной, представляется в виде:

$$\varphi = \omega t - kx + \varphi_0.$$

Тогда фазы колебаний будут иметь вид:

$$\varphi_1 = \omega_1 t - k_1 x_1 + \varphi_{01},$$

$$\varphi_2 = \omega_2 t - k_2 x_2 + \varphi_{02}.$$

А их разность:

$$\begin{aligned} \Delta\varphi = \varphi_2 - \varphi_1 &= (\omega_2 t - k_2 x_2 + \varphi_{02}) - (\omega_1 t - k_1 x_1 + \varphi_{01}) = \\ &= (\omega_2 - \omega_1)t - (k_2 x_2 - k_1 x_1) + (\varphi_{02} - \varphi_{01}). \end{aligned}$$

Если

$$\omega_1 \neq \omega_2 \Rightarrow \Delta\varphi = \text{var}(t),$$

и это нас не устраивает (не выполняется необходимое условие наблюдения интерференции).

Тогда пусть

$$\omega_1 = \omega_2 = \omega \Rightarrow (\omega_2 - \omega_1)t = (\omega - \omega)t = 0$$

Необходимо также, чтобы

$$\varphi_{01} - \varphi_{02} \neq \text{var}(t)$$

тогда пусть

$$\varphi_{01} = \varphi_{02} = \varphi_0 \Rightarrow \Delta\varphi_0 = \varphi_{01} - \varphi_{02} = 0.$$

К тому же

$$\omega_1 = \omega_2 \Rightarrow k_1 = k_2 = k.$$

Последнее следует из следующих фактов:

$$k = \frac{\omega}{v_\phi}, \quad \omega_1 = \omega_2 = \omega.$$

Можно показать, что фазовая скорость может зависеть от частоты и от среды, где распространяется луч. Частота одинакова. Будем считать, что луч распространяется в вакууме. Тогда фазовые скорости волн равны.

В этом случае имеем:

$$\Delta\varphi = (\omega_2 - \omega_1)t - (k_2x_2 - k_1x_1) + (\varphi_{02} - \varphi_{01}) = k(x_2 - x_1) = k\Delta x.$$

Переобозначим координату x , как l (перейдём от координаты к длине пути, который пройден той и другой волной). Тогда:

$$\begin{aligned} l &\equiv x, \\ \Delta\varphi &= k\Delta l, \\ \Delta l &= l_2 - l_1. \end{aligned}$$

Теперь мы можем записать *условие минимума* и *максимума* для интерферирующих волн. Подставив полученное выражение для разности фаз в условие минимума и максимума при скалярном сложении колебаний, получим:

$$\begin{array}{ll} \text{Max:} & \text{Min:} \\ \Delta\varphi = 2\pi p & \Delta\varphi = 2\pi p + \pi \\ p \in N, \Delta\varphi = k\Delta l \Rightarrow & \\ k\Delta l = 2\pi p & k\Delta l = 2\pi p + \pi \end{array}$$

$$k = \frac{2\pi}{\lambda} \Rightarrow$$

$$\begin{aligned} \cancel{\Delta l \frac{2\pi}{\lambda}} &= \cancel{2\pi p} \\ \frac{\Delta l}{\lambda} &= p \end{aligned}$$

$$\Delta l = p\lambda$$

$$\Delta l = 2p \left(\frac{\lambda}{2} \right)$$

$$\begin{aligned} \cancel{\Delta l \frac{2\pi}{\lambda}} &= \cancel{2\pi p} + \frac{2\pi}{2} \\ \frac{\Delta l}{\lambda} &= p + \frac{1}{2} \end{aligned}$$

$$\Delta l = \left(p + \frac{1}{2} \right) \lambda$$

$$\Delta l = (2p + 1) \left(\frac{\lambda}{2} \right)$$

Замечание: Если считать, что волны вышли с одинаковыми начальными фазами, то при условии, что обе волны прошли одинаковое расстояние, либо, если расстояние отлично на целое число длин волн, то волны придут в одинаковой фазе и усилят друг друга, т.к. на длине волны фаза меняется на 2π . Если же одна волна пройдет больше другого на целое число и $1/2$ длины волны, то его фаза сменится на противофазу, и волны будут гасить друг друга.

В итоге получили следующие два условия:

Максимум интерференции наблюдается, если на разности хода укладывается целое число длин волн или четное число полуволен:

$$\Delta l = p\lambda = 2p\left(\frac{\lambda}{2}\right) \quad (2.15)$$

Минимум интерференции наблюдается, если на разности хода укладывается нецелое число длин волн или нечетное число полуволен:

$$\Delta l = \left(p + \frac{1}{2}\right)\lambda = (2p + 1)\left(\frac{\lambda}{2}\right) \quad (2.16)$$

Для наблюдения интерференции, как мы видим, необходимо равенство частот колебаний, близкие плоскости колебаний для поперечных волн и постоянная разность начальных фаз, в случае, если есть возможность их изменения в процессе их распространения.

Более точно, для наблюдения интерференции необходима когерентность всех интерферирующих волн:

Когерентность – это согласованность колебательных процессов в этих лучах.

И так, в итоге, когерентность это:

1. Независимость от времени разности фаз $\Delta\varphi \neq \text{var}(t)$. Это условие в свою очередь сводится к условию одинаковых частот $\omega_1 = \omega_2 = \omega$ и постоянных во времени начальных фаз $\Delta\varphi_0 = \varphi_{01} - \varphi_{02} = \text{var}(t)$.

Световая волна распространяется в виде цугов (см. определение в начале раздела). По причине быстрой смены цугов, когерентность для световой волны может быть обеспечена только путем разделения одного луча на два. При этом начальные фазы становятся равны.

2. Для поперечных волн (в частности световых) у волн должны быть близкие плоскости поляризации.

2.4.2. Дифракция

Дф. Дифракция света – явление, связанное со специфичными свойствами волны и сводящееся к взаимодействию волны с препятствием, соизмеримым с длиной волны света. Суть дифракции сводится к отклонению распространения волны от законов прямолинейного распространения и (в случае оптических явлений) попаданию волны в область геометрической тени.

И дифракция и интерференция – явления чисто волновые.

При решении задач дифракции световых волн задачу интерференции обычно сводят к дифракции вторичных волн – волн, исходящих от точек волнового фронта, взятых в некий, промежуточный период распространения волны.

Для этого используется принцип **Гюгенса-Френеля**:

1) **Гюйгенс**: каждая точка волнового фронта может быть рассмотрена как источник вторичных волн. Т.о. задача на рассмотрение

волны от первичного источника может быть заменена на задачу рассмотрения волн от совокупности вторичных источников.

2) **Френель:** эти источники являются когерентными (вторичные источники). Т.о. задача распространения волны от первичного источника может быть заменена на задачу интерференции волн от вторичных источников.

2.4.3. Поляризация

Df. Поляризация – это то или иное упорядоченное колебание в поперечной волне.

Различают *плоскую (или линейную)* и *круговую (или по кругу)* поляризацию. Также существует промежуточный случай – *эллиптическая поляризация*.

В *плоскополяризованной* волне колебания в направлении распространения волны (*по ходу луча*). Всегда остаются в одной плоскости. Колебания у двух соседних волн всегда происходят в параллельных плоскостях.

В волне, *поляризованной по кругу*, колебания в волне как бы закручены по спирали, а в каждой отдельной точке колебаний – описывает окружность (как при сложении двух взаимно-перпендикулярных колебаний одной амплитуды и периода со сдвигом фаз на $\pi/2$). В случае эллиптической поляризации – описывают эллипс.

Можно показать, что плоская и круглая – частные случаи эллиптической поляризации. С другой стороны эллиптическая – сумма круговой и плоской поляризаций.

Явление поляризации, как явление, свойственное поперечным волнам, присуще свету и другим электромагнитным волнам и не присуще звуку (*звук – волна продольная*). В принципе, уместно говорить о поляризованных волнах де Бройля (*см. Квантовую механику*). Так поляризованный поток электронов – это поток электронов с одинаковым спином. Также свойством поляризации должны обладать и гравитационные волны.

2.4.4. Дисперсия

Df. Дисперсия – это зависимость фазовой скорости волны (*в частности электромагнитной волны, света*) от частоты.

$$v_{\phi} = v_{\phi}(\omega)$$

Замечание 1. Следствием этого является закон преломления и разложение света в спектр при прохождении призмы (*школьное понимание понятия дисперсии*). Здесь, вспоминая определение показателя преломления, приходим к выводу, что зависимость от частоты фазовой скорости влечёт за собой зависимость от частоты показателя преломления. Но не надо забывать, это следствие:

$$v_{\phi} = v_{\phi}(\omega), \quad n = \frac{c}{v_{\phi}} \Rightarrow n = n(\omega)$$

Замечание 2. Также стоит отметить, что, как было показано выше, в случае, если дисперсия отсутствует (*явление дисперсии не наблюдается*), фазовая скорость будет равна групповой. О соотношении этих величин в случае наличия дисперсии мы поговорим в рамках волновой оптики.

2.5. Стоячие волны

2.5.1. Уравнение стоячей волны

Стоячей волной называется волна, получаемая в результате сложения двух волн (*двух бегущих волн*) одинаковой частоты и амплитуды, распространяющихся навстречу друг другу. Эти волны, как мы уже отмечали, будут отличаться знаком перед слагаемым в фазе, которое отвечает за запаздывание колебаний в точке на удалении от источника. То есть знаком перед:

$$kx$$

или

$$\vec{k} \cdot \vec{r}.$$

Для одномерного случая

– волна, движущаяся «от нас»:

$$\xi_1 = A_0 \cos(\omega t - kx + \varphi_{01}),$$

– волна, движущаяся «на нас»:

$$\xi_2 = A_0 \cos(\omega t + kx + \varphi_{02}).$$

Складывая волны, используем формулу для суммы двух косинусов:

$$\cos(\alpha) + \cos(\beta) = 2 \cos\left(\frac{\alpha + \beta}{2}\right) \cdot \cos\left(\frac{\alpha - \beta}{2}\right)$$

Получим:

$$\begin{aligned} \xi &= \xi_1 + \xi_2 = A_0 \cos(\omega t - kx + \varphi_{01}) + A_0 \cos(\omega t + kx + \varphi_{02}) = \\ &= A_0 \left(\cos(\omega t - kx + \varphi_{01}) + \cos(\omega t + kx + \varphi_{02}) \right) = \\ &= A_0 \cdot 2 \cos\left(\frac{\omega t - kx + \varphi_{01} + \omega t + kx + \varphi_{02}}{2}\right) \cdot \\ &\quad \cdot \cos\left(\frac{\omega t - kx + \varphi_{01} - \omega t + kx + \varphi_{02}}{2}\right) = \\ &= 2A_0 \cos\left(\frac{\omega t}{2} - \frac{kx}{2} + \frac{\varphi_{01}}{2} + \frac{\omega t}{2} + \frac{kx}{2} + \frac{\varphi_{02}}{2}\right) \cdot \\ &\quad \cdot \cos\left(\frac{\omega t}{2} - \frac{kx}{2} + \frac{\varphi_{01}}{2} - \frac{\omega t}{2} - \frac{kx}{2} - \frac{\varphi_{02}}{2}\right) = \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= 2A_0 \cos\left(\omega t + \frac{\varphi_{01} + \varphi_{02}}{2}\right) \cos\left(-kx + \frac{\varphi_{01} - \varphi_{02}}{2}\right) = \\
&= 2A_0 \cos\left(\omega t + \frac{\varphi_{01} + \varphi_{02}}{2}\right) \cos\left(kx - \frac{\varphi_{01} - \varphi_{02}}{2}\right) = \\
&= \underbrace{2A_0 \cos\left(kx - \frac{\varphi_{01} - \varphi_{02}}{2}\right)}_{\text{Амплитуда } A} \cos\left(\omega t + \frac{\varphi_{01} + \varphi_{02}}{2}\right).
\end{aligned}$$

Мы видим, что колебания во всех точках будут иметь одну и ту же фазу:

$$\omega t + \frac{\varphi_{01} + \varphi_{02}}{2}.$$

А вот амплитуда будет меняться в зависимости от координаты:

$$A = 2A_0 \cos\left(kx - \frac{\varphi_{01} - \varphi_{02}}{2}\right)$$

Причём, в ряде точек, где косинус равен нулю, колебания вообще не будут совершаться (точка будет неподвижна, в случае механической интерпретации волны). В других же точках, где косинус по модулю будет равен единице, амплитуда стоячей волна будет равна удвоенной амплитуде каждой из исходных, складываемых волн.

2.5.2. Пучности и узлы

Df 1. Точки, где амплитуда колебаний равна нулю, называются **узлами**.

Df 2. Точки, где амплитуда колебаний максимальна, называются **пучностями**.

Расстояние между узлами и между пучностями. Из уравнения видно, что и узлы и пучности будут повторяться через одно и то же расстояние. Найдём это расстояние.

Расстояние между пучностями. Амплитудное (максимальное) значение косинуса равно ± 1 :

$$\begin{aligned}
A \rightarrow \max &\Rightarrow \cos\left(kx - \frac{\varphi_{01} - \varphi_{02}}{2}\right) = \pm 1 \Rightarrow \\
&\Rightarrow kx - \frac{\varphi_{01} - \varphi_{02}}{2} = 0 + \pi m, m \in \mathbb{Z}
\end{aligned}$$

Тогда координаты m -ой пучности:

$$\begin{aligned}
A_{\max m} &\Rightarrow kx_m - \frac{\varphi_{01} - \varphi_{02}}{2} = \pi m, \\
A_{\max m+1} &\Rightarrow kx_{m+1} - \frac{\varphi_{01} - \varphi_{02}}{2} = \pi(m+1).
\end{aligned}$$

Расстояние $\Delta x_{A_{\max}}$ между двумя соседними пучностями (между $(m+1)$ -ой и m -ой):

$$\begin{aligned}\Delta x_{A_{\max}} &\Rightarrow \left(kx_{m+1} - \frac{\varphi_{01} - \varphi_{02}}{2} \right) - \left(kx_m - \frac{\varphi_{01} - \varphi_{02}}{2} \right) = \\ &= \pi(m+1) - \pi m, \\ kx_{m+1} - \frac{\varphi_{01} - \varphi_{02}}{2} - kx_m + \frac{\varphi_{01} - \varphi_{02}}{2} &= \\ &= \cancel{\pi m} + \pi - \cancel{\pi m}, \\ kx_{m+1} - kx_m &= \pi.\end{aligned}$$

Теперь найдём $\Delta x_{A_{\max}}$:

$$\begin{aligned}k \underbrace{(x_{i+1} - x_i)}_{\Delta x_{A_{\max}}} &= \pi, \\ k \Delta x_{A_{\max}} &= \pi, \\ \Delta x_{A_{\max}} &= \pi/k.\end{aligned}$$

Теперь вспомним, как выражается волновое число через длину волны:

$$\begin{aligned}k &= \frac{2\pi}{\lambda} \Rightarrow \\ \Delta x_{A_{\max}} &= \frac{\cancel{\pi}}{2\cancel{\pi}/\lambda} = \frac{\lambda}{2}, \\ \Delta x_{A_{\max}} &= \frac{\lambda}{2}.\end{aligned}\tag{2.17}$$

Аналогично можно найти расстояние между узлами:

$$\begin{aligned}A \rightarrow \min \quad (A = 0) &\Rightarrow \cos \left(kx - \frac{\varphi_{01} - \varphi_{02}}{2} \right) = 0 \Rightarrow \\ &\Rightarrow kx - \frac{\varphi_{01} - \varphi_{02}}{2} = \pi + \pi m, m \in \mathbb{Z} \\ k \Delta x_{A_{\min}} &= (\pi + \pi(m+1)) - (\pi + \pi m) = \\ &= \cancel{\pi} + \cancel{\pi m} + \pi - \cancel{\pi} - \cancel{\pi m} = \pi, \\ k \Delta x_{A_{\min}} &= \pi \Rightarrow \frac{2\pi}{\lambda} \Delta x_{A_{\min}} = \pi, \\ \Delta x_{A_{\min}} &= \frac{\lambda}{2}.\end{aligned}\tag{2.18}$$

Рассуждения между узлами и расстояние между пучностями с использованием **теории интерференции**. Чаще всего стоячи волны образуются при интерференции волны с этой же волной, отражённой от препятствия. В этом случае обе волны имеют одну и ту же амплитуду и частоту, и распространяются навстречу друг другу. Отметим, что в этом случае разностью хода в рассматриваемой точке будет расстояние, пройденное волной от точки до препятствия плюс расстояние от препятствия до рассматриваемой точки. То есть разность хода интерферирующих волн будет в два раза больше, чем расстояние от рассматриваемой точки до препятствия, от которого отражается волна.

Рассмотрим расстояние между интерференционными максимумами или интерференционными минимумами для случая интерференции двух волн, распространяющихся вдоль одной прямой:

– между $m+1$ -ым и m -ым максимумами

$$\begin{aligned} \Delta l_{\max} = 2m \frac{\lambda}{2} &\Rightarrow \Delta l_{\max_{m+1}} - \Delta l_{\max_m} = 2(m+1) \frac{\lambda}{2} - 2m \frac{\lambda}{2} = \\ &= \cancel{2m} \frac{\lambda}{2} + \cancel{2} \frac{\lambda}{2} - \cancel{2m} \frac{\lambda}{2} = \lambda \end{aligned}$$

– между $m+1$ -ым и m -ым минимумами

$$\begin{aligned} \Delta l_{\min} = (2m+1) \frac{\lambda}{2} &\Rightarrow \Delta l_{\min_{m+1}} - \Delta l_{\min_m} = \\ &= (2(m+1)+1) \frac{\lambda}{2} - (2m+1) \frac{\lambda}{2} = \\ &= \cancel{2m} \frac{\lambda}{2} + \cancel{2} \frac{\lambda}{2} + \cancel{\lambda} - \cancel{2m} \frac{\lambda}{2} - \cancel{\lambda} = \lambda \end{aligned}$$

Учитывая, что разность хода равна удвоенной координате, получаем:

$$\Delta l = l_1 - l_2 = x - (-x) = 2x \Rightarrow$$

$$\Delta x_{A_{\max}} = \Delta x_{A_{\min}} = \frac{\lambda}{2} \quad (2.19)$$

«**Длина стоячей волны**» и «**бегущие волны**». Расстояние между двумя пучностями или, что тоже самое, расстояние между двумя узлами, равно $\frac{\lambda}{2}$, иногда называют **длиной стоячей волны**. Однако надо понимать, что к длине волны в принятом нами выше определении (*и первом и втором*) этот термин не имеет никакого отношения. Как «*минимальное расстояние между точками колеблющимися в одной фазе*» – в стоячей волне все точки колеблются в одной фазе, а амплитуда зависит от координаты (*это не имеет никакого отношения к фазе волны*). Как «*расстояние, пройденное волной за один период колебаний*» – стоячая волна не проходит ни какого расстояния (*на то она и стоячая* 😊).

И ещё. Чтобы как-то разделить стоячие волны и обыкновенные, не стоячие волны, волну – процесс распространения колебаний или возмущений называют иногда *бегущей волной*. В этом случае надо понимать, что *бегущая волна* – это любая волна, кроме *стоячей*.

И так, общий вид стоячей волны и её отличие от бегущей волны поясним на двух рисунках.

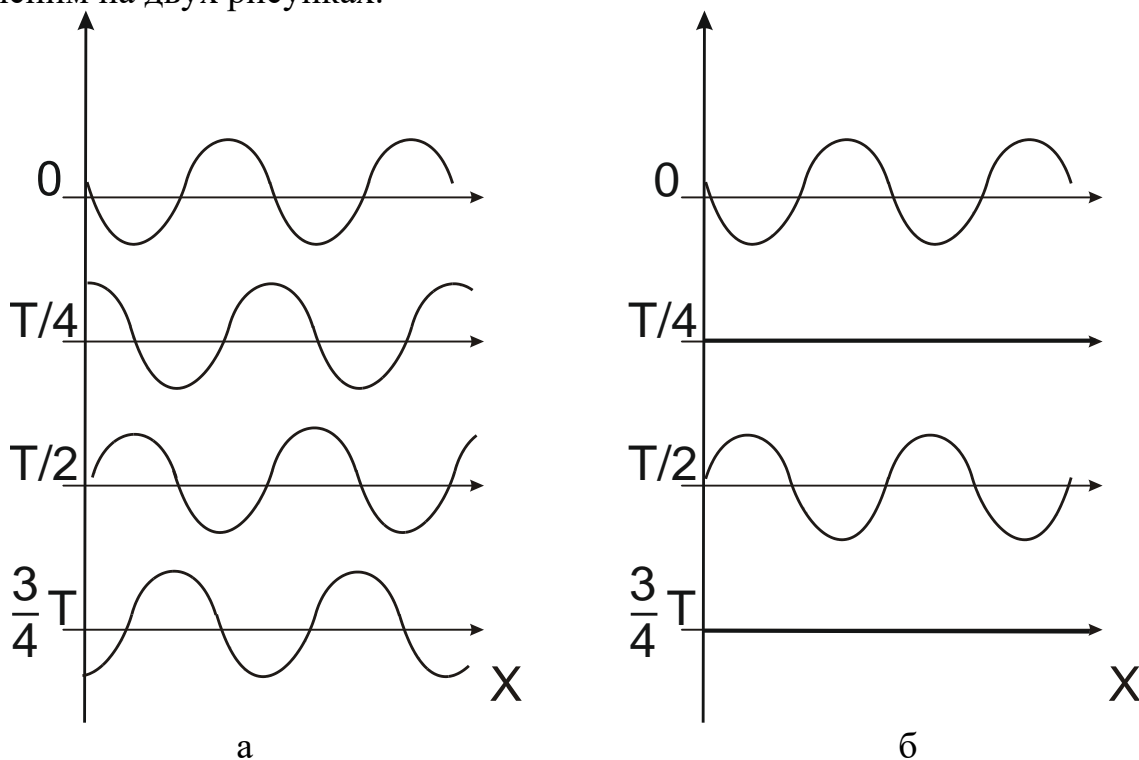


Рисунок 2.15

а – Бегущая волна б – Стоячая волна

Различие между бегущей и стоячей волной

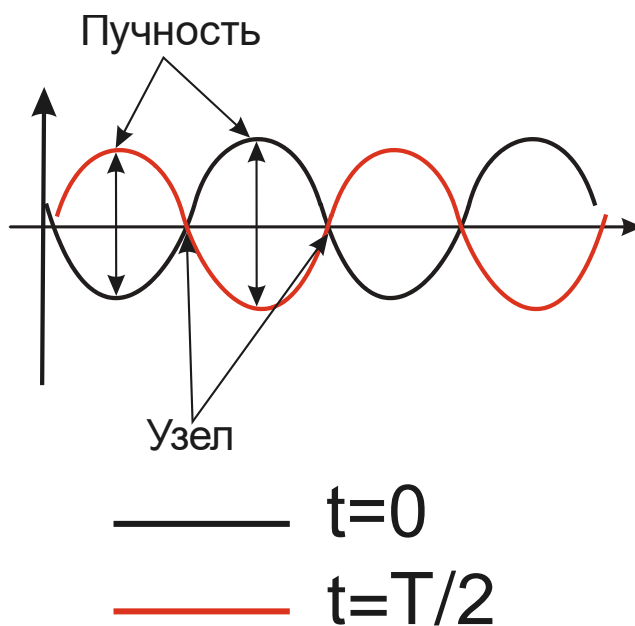


Рисунок 2.16

Общий вид стоячей волны: узлы и пучности.

2.5.3. Резонанс стоячих волн

Как было сказано выше, под резонансом мы понимаем резкое увеличение амплитуды колебаний. При сложении стоячих волн резонанс может наступить в случае совпадения узлов и пучностей в обеих волнах.

Фаза стоячей волны имеет одно и то же значение во всех точках (*не меняется в зависимости от координаты*). Поскольку при резонансе стоячих волн речь идёт об интерференции волны с ней же самой, только отражённой от препятствия, начальные фазы у двух взаимодействующих волн будут совпадать. Тогда амплитуда волны:

$$A = 2A_0 \cos\left(kx - \frac{\varphi_0 - \varphi_0}{2}\right) = 2A_0 \cos kx.$$

Глядя на выражение, можно сделать вывод, что в точке отражения (у *границы препятствия*) будет наблюдаться пучность. На самом деле, наличие пучности или узла в этой точке будет определяться из условия взаимодействия волны с препятствием, от которого она отражается. Так для звуковой волны при отражении от границы менее плотная – более плотная среда, будет наблюдаться пучность. В противном случае – узел. При отражении светового луча от границы раздела более оптически плотная – менее оптически плотная среда будет наблюдаться пучность. В противном случае – узел. Эти факты доказываются отдельно и по-разному, но имеют одинаковый смысл – в одном из *случаев* фаза волны меняется на противофазу.

Для возникновения резонанса при взаимодействии двух стоячих волн, возникших при отражении от двух противоположных стенок резонатора, амплитуда у двух стенок должна иметь либо максимум, либо минимум – мы должны иметь либо *пучность*, либо *узел* у обеих стенок *резонатора*.

В первом случае:

$$\begin{aligned} A &= 2A_0 \cos kx, \\ x = 0 &\Rightarrow \cos k \cdot 0 = 1, \\ &\Rightarrow \cos kl = \pm 1, \\ \frac{2\pi}{\lambda} l &= n\pi, \\ l &= n \frac{\lambda}{2}, \quad n \in \mathbb{N}. \end{aligned}$$

Во втором случае:

$$\begin{aligned} A &= 2A_0 \cos\left(kx + \frac{\pi}{2}\right), \\ x = 0 &\Rightarrow \cos\left(k \cdot 0 + \frac{\pi}{2}\right) = 0, \end{aligned}$$

$$\Rightarrow \cos\left(kl + \frac{\pi}{2}\right) = 0,$$

$$\frac{2\pi}{\lambda}l + \frac{\pi}{2} = \frac{\pi}{2} + n\pi,$$

$$l = n\frac{\lambda}{2}, \quad n \in \mathbb{N}.$$

Мы получили, что в любом случае для возникновения резонанса длина резонатора должна равняться целому числу полуволн резонирующей волны:

$$l = n\frac{\lambda}{2}, \quad n \in \mathbb{N}. \quad (2.20)$$

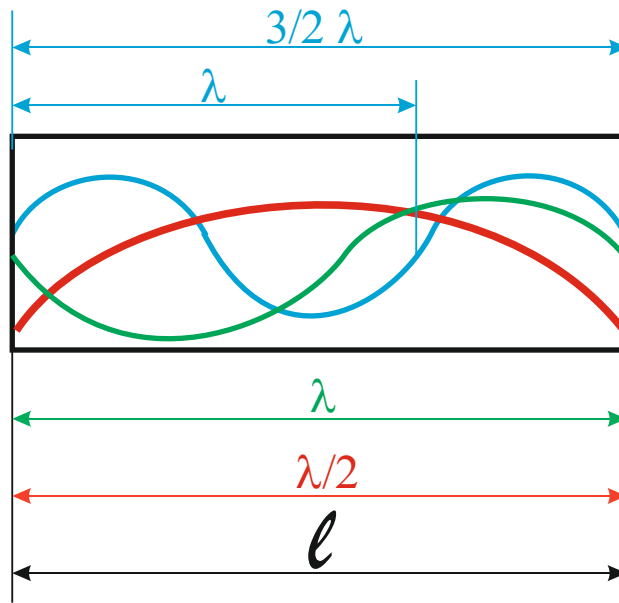


Рисунок 2.17
Резонанс стоячих волн

На Рисунок 2.17 наглядно продемонстрировано возникновение в резонаторе резонанса стоячих волн различного периода.

3. Волны различной природы и их свойства¹

3.1. Электромагнитная волна

Электромагнитная волна – есть волна, в которой распространяются колебания электромагнитного поля. Численно описать колебания электромагнитного поля мы можем, как периодическое изменение параметров электрического и магнитного полей – векторов \vec{E} и \vec{B} (*напряжённости электрического и индукции магнитного полей*). Таким образом, фактически, электромагнитная волна будет волной, в которой распространяются колебания векторов \vec{E} и \vec{B} . Также, вместо этих векторов мы можем говорить о колебаниях вспомогательных характеристик волн – векторов \vec{D} и \vec{H} (*вектора электрического смещения и напряжённости магнитного поля*).

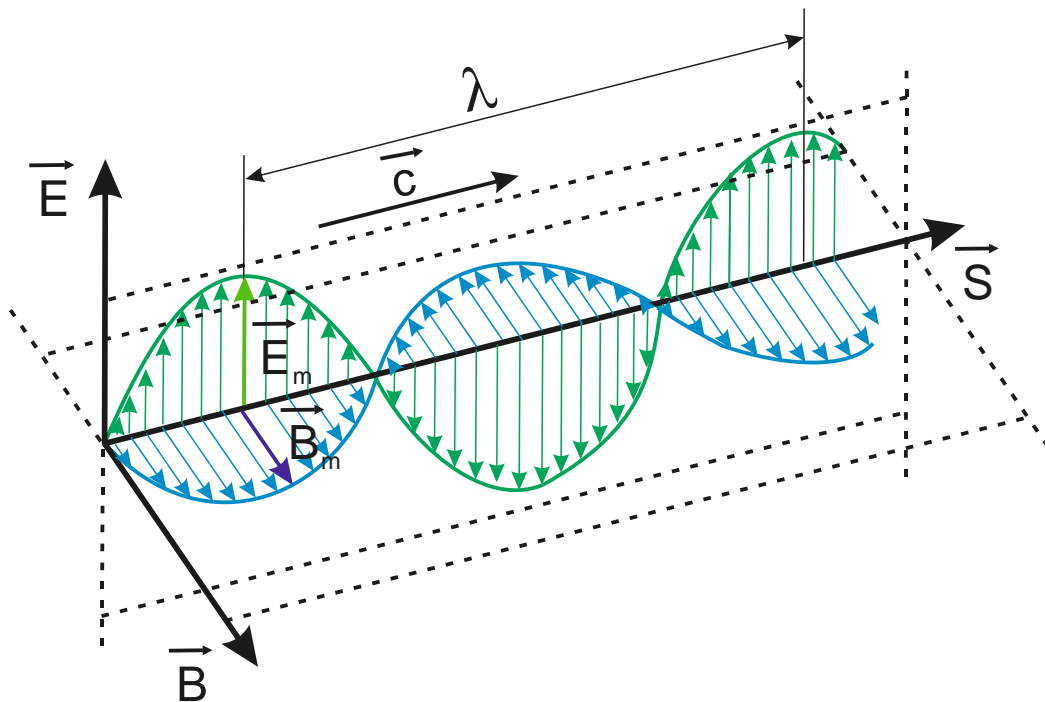


Рисунок 3.1

Электромагнитная волна

3.1.1. Уравнение электромагнитной волны

Докажем, что любое возмущение (*изменение*) электромагнитного поля будет распространяться в виде волны. Для этого сведём уравнение Максвелла к волновому уравнению.

Рассмотрим четыре уравнения Максвелла (*в среде в отсутствии заряда*):

$$\underbrace{\nabla \times \vec{E}}_{\text{rot } \vec{E}} = -\mu\mu_0 \frac{\partial \vec{H}}{\partial t}, \quad (3.1)$$

¹ Стандартный курс физики, читаемый в СПбГТИ(ТУ) из всего этого раздела содержит, обычно, только параграф «Электромагнитные волны». Студенты, обучающиеся у меня, должны знать весь объём.

$$\underbrace{\nabla \cdot \bar{H}}_{\text{div } \bar{H}} = 0, \quad (3.2)$$

$$\underbrace{\nabla \times \bar{H}}_{\text{rot } \bar{H}} = \varepsilon \varepsilon_0 \frac{\partial \bar{E}}{\partial t}, \quad (3.3)$$

$$\underbrace{\nabla \cdot \bar{E}}_{\text{div } \bar{E}} = 0. \quad (3.4)$$

Здесь:

$$\begin{aligned} \bar{B} &= \mu \mu_0 \bar{H}, \\ \bar{E} &= \varepsilon \varepsilon_0 \bar{D}. \end{aligned}$$

Умножим уравнение (3.1) слева векторно на ∇ :

$$\nabla \times \nabla \times \bar{E} = \nabla \times \left(-\mu \mu_0 \frac{\partial \bar{H}}{\partial t} \right)$$

Правая часть:

$$\nabla \times \left(-\mu \mu_0 \frac{\partial \bar{H}}{\partial t} \right) = -\mu \mu_0 \nabla \times \frac{\partial \bar{H}}{\partial t} = -\mu \mu_0 \frac{\partial}{\partial t} (\nabla \times \bar{H})$$

Подставляем правую часть уравнения (3.3):

$$\begin{aligned} -\mu \mu_0 \frac{\partial}{\partial t} (\nabla \times \bar{H}) &= -\mu \mu_0 \frac{\partial}{\partial t} \left(\varepsilon \varepsilon_0 \frac{\partial \bar{E}}{\partial t} \right) = -\mu \mu_0 \varepsilon \varepsilon_0 \frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{\partial \bar{E}}{\partial t} \right) = \\ &= -\mu \mu_0 \varepsilon \varepsilon_0 \frac{\partial^2 \bar{E}}{\partial t^2} \end{aligned}$$

Из математической физики известно:

$$\nabla \times \nabla \times \bar{A} = \nabla (\nabla \cdot \bar{A}) - \Delta \bar{A}$$

$$\Delta = \nabla^2 = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2}$$

Тогда левая часть:

$$\nabla \times \nabla \times \bar{E} = \nabla \underbrace{(\nabla \cdot \bar{E})}_0 - \Delta \bar{E} = -\Delta \bar{E},$$

где

$$\nabla \cdot \bar{E} = 0,$$

исходя из уравнения (3.4).

В итоге получим:

$$\Delta \bar{E} = \varepsilon \varepsilon_0 \mu \mu_0 \frac{\partial^2 \bar{E}}{\partial t^2}$$

$$\Delta \bar{E} = \frac{1}{v^2} \frac{\partial^2 \bar{E}}{\partial t^2}$$

где $v = \frac{1}{\sqrt{\varepsilon \varepsilon_0 \mu \mu_0}}$ – скорость (фазовая) электромагнитной волны.

Замечание 1. Полученное уравнение есть дифференциальное уравнение, называемое волновым уравнением. Его решением является волна. Т.о. электромагнитное поле будет распространяться в виде волны.

Замечание 2. Из полученного уравнения можно найти уравнение для фазовой скорости электромагнитной волны в вакууме и в среде, т.к. коэффициент перед производной по времени есть величина обратная квадрату этой скорости.

Не будем повторять заново весь вывод. Отметим только, что в вакууме $\varepsilon=1$ и $\mu=1$. Тогда, если

$$v_{\phi} = \frac{1}{\sqrt{\varepsilon \varepsilon_0 \mu \mu_0}} \quad (3.5)$$

– фазовая скорость электромагнитной волны в среде,

то

$$c = \frac{1}{\sqrt{\varepsilon_0 \mu_0}} \quad (3.6)$$

– фазовая (она же групповая) скорость электромагнитной волны в вакууме.

Последняя величина, так же является: **скоростью распространения электромагнитной волны, электродинамической постоянной и коэффициентом в уравнении интервала специальной теории относительности** (коэффициент метрики пространства Минковского).

Замечание 3. Система СИ и фундаментальные константы. Из 3-х упомянутых в последнем уравнении величин $(\varepsilon_0, \mu_0, c)$ μ_0 определяется из самой системы СИ. Эталон базовой физической величины «Сила тока» – 1А определяется по силе взаимодействия 2-х бесконечно длинных проводников:

- Ампер равен силе тока, при которой два бесконечных длинных проводника, расположенных на расстоянии 1 метра притягиваются с силой $2 \cdot 10^{-7}$ Н/м.

С другой стороны, сила взаимодействия 2-х бесконечно длинных проводников (в вакууме) определяется соотношением:

$$f = \frac{F}{l} = \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{2I_1 I_2}{b}$$

Отсюда:

$$\frac{\cancel{Z} \cdot 10^{-7}}{1} = \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{\cancel{Z} \cdot 1 \cdot 1}{1} \Rightarrow \mu_0 = 4\pi \cdot 10^{-7}$$

С другой стороны, скорость света в системе СИ считается точно определённой константой (*величиной, которая была в своё время измерена с высокой точностью и на сегодняшний день зафиксирована и лежит в основе соотношения между длиной и временем*):

$$c = 299792458 \frac{\text{м}}{\text{с}}$$

Следовательно, из выражения (3.6) получаем:

$$\varepsilon_0 = \frac{1}{\mu_0 c^2} = \frac{1}{4\pi c^2} \cdot 10^7 = \frac{1}{4\pi \cdot 299792458^2} \cdot 10^7 \frac{\text{Ф}}{\text{м}}$$

Константа в законе Кулона будет равна:

$$k = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} = \frac{1}{\cancel{4\pi} \frac{1}{\cancel{4\pi} c^2} \cdot 10^7} = c^2 \cdot 10^{-7} = 299792458^2 \cdot 10^{-7} \frac{\text{М}}{\text{Ф}}$$

Коэффициент преломления.

Df:

$$n = \frac{c}{v_\phi}$$

– (абсолютный) коэффициент преломления.

Величина n равная отношению скорости света в вакууме к фазовой скорости света в среде называется **коэффициент преломления**.

n – Коэффициент преломления.

Отсюда имеем:

$$n = \frac{1/\sqrt{\varepsilon_0 \mu_0}}{1/\sqrt{\varepsilon \varepsilon_0 \mu \mu_0}} = \sqrt{\frac{\varepsilon \varepsilon_0 \mu \mu_0}{\varepsilon_0 \mu_0}} = \sqrt{\varepsilon \mu}$$

Для не ферромагнетиков $\mu \approx 1$.

Тогда

$$n \approx \sqrt{\varepsilon}$$

Это ещё понадобится нам в дальнейшем.

Замечание 4. Сразу отметим, чтобы не возвращаться далее, что свет является **электромагнитной волной** с длиной волны (в вакууме) для видимой глазом части спектра от 380 нм до 740 нм ($3.8 \cdot 10^{-7}$ – $7.4 \cdot 10^{-7}$ м) и частотой $3.94 \cdot 10^{14}$ – $7.49 \cdot 10^{14}$ Гц.

Весь спектр электромагнитных волн приведен в

Таблица 3.1

Спектр электромагнитных волн

Диапазон	Поддиапазон	Длина волны, λ		Частота, ν	
		м	–	Гц	–
Радиоволны	–	$>2 \cdot 10^{-3}$	>2000 мкм		
Инфракрасное излучение	Дальний	$1 \cdot 10^{-5} - 2 \cdot 10^{-3}$ $\cdot 10^{-7}$	2000-10.0 мкм		
	Ближний	(0.74-10.0) $\cdot 10^{-6}$	0.74-10.0 мкм		
Видимый свет (оптический диапазон)	Красный	(6.25-7.40) $\cdot 10^{-7}$	625-740 нм	(4.05-4.80) $\cdot 10^{14}$	4.05-4.80 ТГц
	Оранжевый	(5.90-6.25) $\cdot 10^{-7}$	590-625 нм	(4.80-5.10) $\cdot 10^{14}$	4.80-5.10 ТГц
	Желтый	(5.65-5.90) $\cdot 10^{-7}$	565-590 нм	(5.10-5.30) $\cdot 10^{14}$	5.10-5.30 ТГц
	Зелёный	(5.00-5.65) $\cdot 10^{-7}$	500-565 нм	(5.30-6.00) $\cdot 10^{14}$	5.30-6.00 ТГц
	Голубой	(4.85-5.00) $\cdot 10^{-7}$	485-500 нм	(6.00-6.20) $\cdot 10^{14}$	6.00-6.20 ТГц
	Синий	(4.40-4.85) $\cdot 10^{-7}$	440-485 нм	(6.20-6.80) $\cdot 10^{14}$	6.20-6.80 ТГц
	Фиолетовый	(3.80-4.40) $\cdot 10^{-7}$	380-440 нм	(6.80-7.90) $\cdot 10^{14}$	6.80-7.90 ТГц
Ультрафиолет	Ближний	(4.00-3.00) $\cdot 10^{-7}$	300-380 нм		
	Средний	(3.00-2.00) $\cdot 10^{-7}$	200-300 нм		
	Дальний	(2.00-1.22) $\cdot 10^{-7}$	120-200 нм		
	Экстремальный	(1.00-12.1) $\cdot 10^{-8}$	10-120 нм		
Рентген	Мягкий	$(1-100)10^{-10}$	0.1-10 нм		
	Жесткий	$(1-10)10^{-11}$	0.01-0.1 нм		
γ -излучение	–	$<10^{-10}$	<0.01 нм		

Замечание 5.

$\vec{B} \perp \vec{E}$, $\vec{E} \perp \vec{B}$ – это следует из уравнения Максвелла ($\vec{B} \sim \nabla \times \vec{E}$, $\vec{E} \sim \nabla \times \vec{B}$).

$\left\{ \begin{array}{l} \vec{B} \perp \vec{c} \ (\vec{B} \perp \vec{n}) \\ \vec{E} \perp \vec{c} \ (\vec{E} \perp \vec{n}) \end{array} \right.$ – это следует из уравнения волны.

Т.о. электромагнитная волна является **поперечной волной**. Плоскость колебания вектора \vec{E} является плоскостью световых колебаний (для света).

Плоскость колебания вектора \vec{B} - плоскость поляризации (? на сегодняшний день существует и другая система определений.).

Уравнение электромагнитной волны для одномерного случая будет иметь вид (в общем виде):

$$E = E_0 \cos(\omega t - kx + \varphi_0). \quad (3.7)$$

Уравнение будет определять периодическое изменение основного вектора, характеризующего электромагнитное поле – вектора напряженности электрического поля, как показателя периодического изменения самого электромагнитного поля.

3.1.2. Энергия электромагнитной волны. Вектора Умова и Пойнтенга

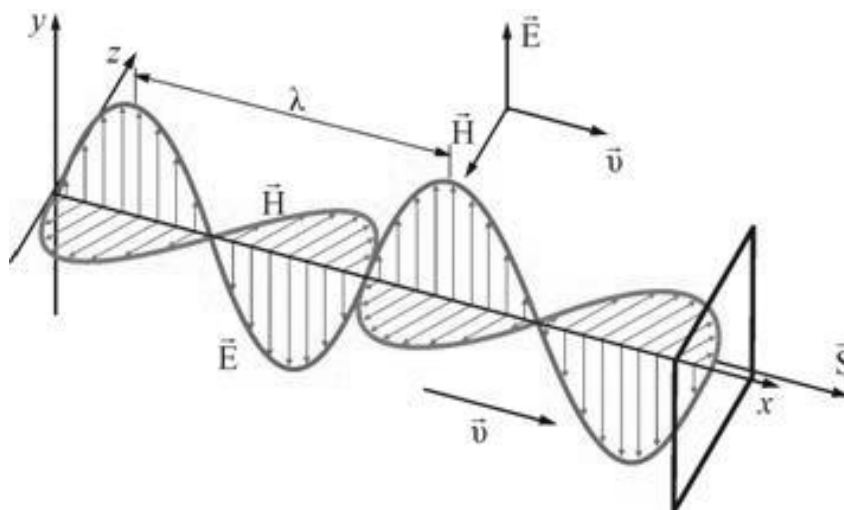


Рисунок 3.2

Электромагнитная волна, её длина λ ,
 скорость \vec{v} , вектор Пойнтинга \vec{S}

Вектор, показывающий направление распространения волны и численно равный плотности потока энергии этой волны называется Вектором Умова:

$$\vec{j} = \frac{dW}{dS_{\perp} dt} \vec{n}, \quad (3.8)$$

где:

- W – энергия,
- S_{\perp} – площадь поперечной площадки,
- t – время,
- \vec{n} – единичная нормаль к поверхности S_{\perp} .

По смыслу, плотность потока W за время t .

Напомним, если

$$\Phi = \int_{S_1} \bar{j} \cdot d\bar{S} \quad - \text{интеграл потока,}$$

тогда

$$\bar{j} = \frac{d\Phi}{dS_{\perp} dt} \bar{n} \quad - \text{соответствующая плотность потока.}$$

Для плотности потока энергии волны (*вектор Умова*) имеем

$$\begin{aligned} j &= \frac{dW}{S_{\perp} dt} = \frac{dW}{S_{\perp} dt} \cdot \frac{dx}{dx} = \frac{dW dx}{S_{\perp} dt dx} = \\ &= \frac{dW dx}{S_{\perp} dx dt} = \underbrace{\frac{dW}{dV}}_w \cdot \underbrace{\frac{dx}{dt}}_v = wv. \end{aligned}$$

Здесь мы учли следующее:

$$\frac{dx}{dt} = v \quad - \text{скорость волны,}$$

$$S dx = dV \quad - \text{элементарный объем,}$$

$$w = \frac{dW}{dV} \quad - \text{объемная плотность энергии,}$$

$$\bar{v} \uparrow \uparrow \bar{n} \quad - \text{параллельно направлению распр.}$$

Тогда плотность потока энергии будет задаваться формулой:

$$\bar{j} = w \bar{v}. \quad (3.9)$$

– *вектор Умова*.

Определим объемную плотность энергии для электромагнитного поля ω . Напомним, что для электрического и магнитного полей эти величины, соответственно, равны:

$$w_E = \frac{\epsilon_0 E^2}{2} = \frac{ED}{2} = \frac{D^2}{2\epsilon_0},$$

$$w_B = \frac{B^2}{2\mu_0} = \frac{BH}{2} = \frac{\mu_0 H^2}{2}.$$

Здесь

$$D = \mu\epsilon_0 E,$$

$$B = \mu\mu_0 H.$$

Для плотности энергии электромагнитной волны получим

$$w = w_E + w_B = \frac{\epsilon_0 E^2}{2} + \frac{\mu_0 H^2}{2}$$

Можно показать, что для амплитудных значений:

$$\frac{\varepsilon_0 E_0^2}{2} = \frac{\mu_0 H_0^2}{2} .$$

В самом деле, если энергия поля представлена в двух видах (электрической и магнитной), в процессе колебаний она будет перетекать из одного вида в другой. При этом амплитудные значения того и другого вида энергии будут равны между собой и равны, в свою очередь, полной энергии колебательной системы. См. «энергию колебательной системы».

В случае вакуума это будет верно и для мгновенных значений

$$\sqrt{\varepsilon_0} E = \sqrt{\mu_0} H$$

$$\begin{aligned} w &= \frac{\varepsilon_0 E^2}{2} + \frac{\mu_0 H^2}{2} = \frac{(\sqrt{\varepsilon_0})^2 E \cdot \sqrt{\mu_0} H}{2 \sqrt{\varepsilon_0}} + \frac{(\sqrt{\mu_0})^2 H \cdot \sqrt{\varepsilon_0} E}{2 \sqrt{\mu_0}} = \\ &= \frac{\sqrt{\varepsilon_0 \mu_0} EH}{2} + \frac{\sqrt{\varepsilon_0 \mu_0} EH}{2} = \sqrt{\varepsilon_0 \mu_0} EH = \frac{EH}{c} \end{aligned}$$

Здесь

$$E = \frac{\sqrt{\mu_0}}{\sqrt{\varepsilon_0}} H ,$$

$$H = \frac{\sqrt{\varepsilon_0}}{\sqrt{\mu_0}} E ,$$

$$c = \frac{1}{\sqrt{\varepsilon_0 \mu_0}} ,$$

Тогда

$$w = \sqrt{\varepsilon_0 \mu_0} EH = \frac{EH}{c} .$$

Подставим это выражение в вектор Умова:

$$j = wc = \frac{1}{c} EHc = EH$$

$$(\vec{E} \times \vec{H}) \uparrow \uparrow \vec{c}$$

$$(\vec{E} \times \vec{H} \uparrow \uparrow \vec{n})$$

$$\vec{j} = \vec{E} \times \vec{H} .$$

Полученный вектор называется **вектором Поинтинга**. Он показывает плотность потока электромагнитной волны

$$\bar{S} = \bar{E} \times \bar{H}, \quad (3.10)$$

при этом (по физическому смыслу)

$$\bar{S} = w \bar{c}. \quad (3.11)$$

Df. Интенсивность – это модуль среднего по времени значения энергии переносимой волной.

$$I = \left| \langle \bar{S} \rangle \right|. \quad (3.12)$$

$$S = EH$$

$$\sqrt{\varepsilon_0} E = \sqrt{\mu_0} H$$

$$H = \frac{\sqrt{\varepsilon_0} E}{\sqrt{\mu_0}} = \alpha E$$

$$S = EH = \alpha^2 E^2 = \beta A^2 \Rightarrow I = \langle S \rangle = \langle \beta A^2 \rangle = \beta A^2 \Rightarrow I \sim A^2$$

Интенсивность световой волны пропорциональна квадрату напряженности:

$$I \sim E^2.$$

2.6.4 Циклическая частота и волновой вектор, как 4-вектор пространства Минковского

Докажем следующее утверждение – частота и волновой вектор вместе образуют 4-вектор в пространстве Минковского специальной теории относительности (СТО): $\{\omega, \bar{k}\}$ – 4-вектор.

Данный вектор должен иметь следующие компоненты:

$$(c\omega, \bar{k}) = (c\omega, k_x, k_y, k_z).$$

Просто вычислим его псевдо-скалярное произведение (длину). Если эта величина не будет зависеть от выбора системы отсчёта, то это действительно 4-вектор.

Для начала, для простоты вычислений, выберем ось Ox в направлении движения электромагнитной волны (то есть в направлении вектора Поинтинга \bar{S} , туда же направлен волновой вектор \bar{k}):

$$\bar{S} \uparrow \uparrow Ox \Rightarrow k_y = k_z = 0.$$

Тогда:

$$\left(\frac{1}{c}\omega\right)^2 - \underbrace{k_x^2 - k_y^2 - k_z^2}_0 = \left(\frac{1}{c}\omega\right)^2 - k_x^2.$$

Далее используем пару преобразований. Заменяем циклически частоту на её выражение через период:

$$\omega = \frac{2\pi}{T},$$

и волновое число заменим на выражение через длину волны, а её (по определению – расстояние, пройденное волной за один период колебаний) заменим на скорость света и период.

$$\left. \begin{array}{l} k = \frac{2\pi}{\lambda} \\ \lambda = cT \end{array} \right\} \Rightarrow k = \frac{2\pi}{cT}.$$

При этом заметим, что *скорость света одинакова во всех системах отсчёта!* Причём она равна константе c в множителе $\frac{1}{c}$, который мы ввели в соответствии с метрикой перед частотой.

Тогда получим:

$$\left(\frac{1}{c}\omega\right)^2 - k_x^2 = \frac{1}{c^2} \frac{4\pi^2}{T^2} - \frac{4\pi^2}{c^2 T^2} = \frac{\cancel{4\pi^2}}{c^2 \cancel{T^2}} - \frac{\cancel{4\pi^2}}{c^2 \cancel{T^2}} = 0.$$

И так. Циклическая частота ω вектор и волновой вектор \bar{k} вместе образуют 4-вектор

$$k_\mu = (c\omega, \bar{k}) = (c\omega, k_x, k_y, k_z) = (k_0, k_1, k_2, k_3), \quad (3.13)$$

длина которого равна 0 . Последнее вполне очевидно – этот вектор лежит на световом конусе.

Полученный факт понадобится нам при выводе уравнения Эйнштейна для импульса фотона при построении квантовой оптики.

3.2. Виды механических волн (распространение колебаний в среде)

Назовём механическими волнами все волны, связанные с распространением колебаний атомов и молекул вещества (*т.е. изменением их координат в пространстве с течением времени*). Такие волны ещё называются упругими (*сюда не включают волны на границе раздела фаз*). Но иногда упругими волнами называются лишь волны в твёрдой среде и к ним не относят звуковые волны в жидкостях и газах. Приведём общую схему всех механических волн:

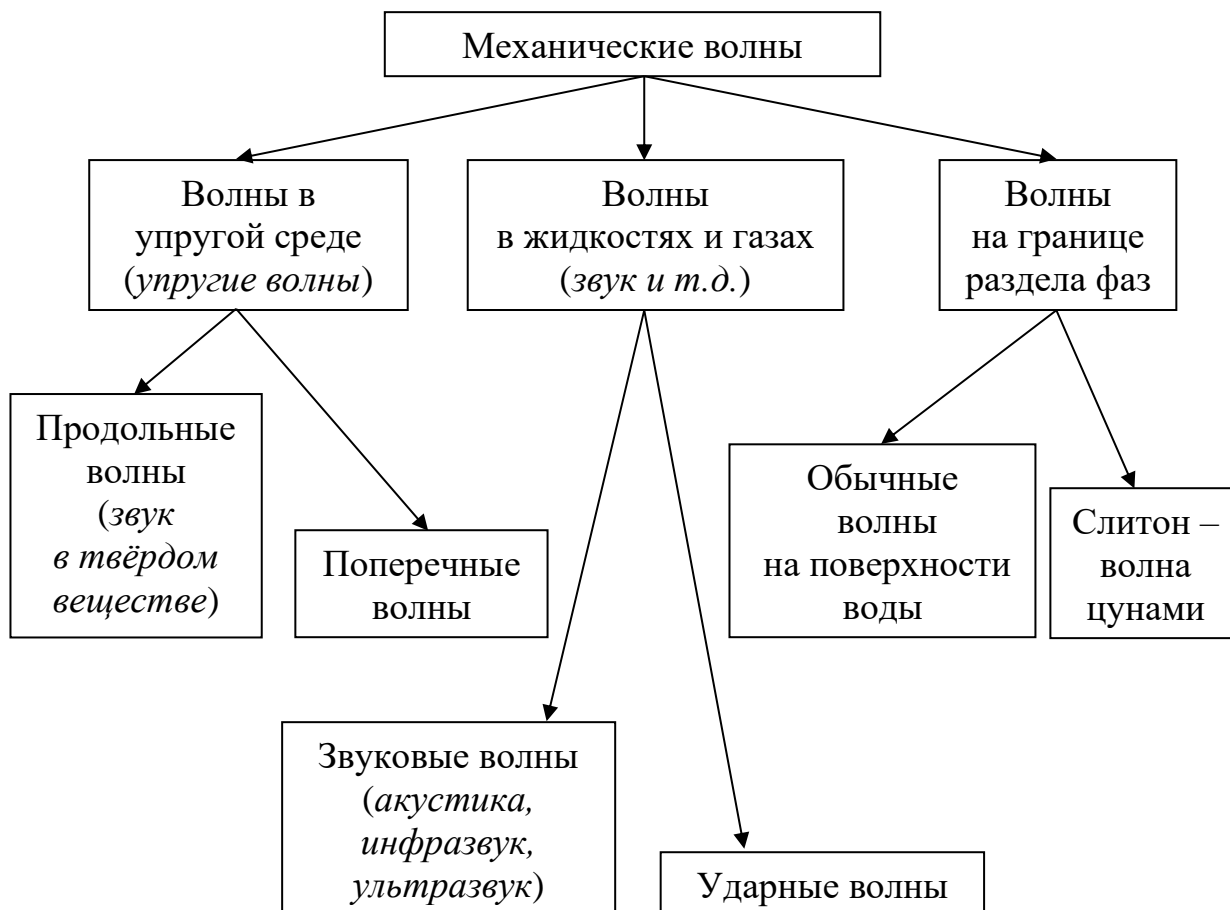


Рисунок 3.3

Схематичное изображение видов механических волн

В упругой среде – веществе, находящемся в твёрдом фазовом состоянии, где действуют упругие силы – могут распространяться как продольные, так и поперечные волны. Эти волны связаны с распространением колебаний атомов или молекул вещества относительно своего равновесного положение в кристаллической решётке. Если колебания атомов или молекул происходит в направлении, перпендикулярном распространению волны, это будет поперечная волна. Если же колебания происходят в направлении распространения волны – это продольная волна.

Скорость продольных и поперечных волн в упругой среде, как мы покажем ниже, будет различна. Поэтому не имеет смысла говорить о волне с произвольным направлением колебаний частиц. Волна в любом случае будет распадаться две составляющих – продольную и поперечную, которые будут

«жить своей жизнью» каждая. Механические волны в жидкости и газе, воспринимаемые нашим ухом как звук, являются продольными волнами. Поэтому, переходя из жидкости или газа в упругую среду и обратно, они будут превращаться именно в продольные упругие волны. Именно их мы и будем называть звуком в твёрдом веществе (*в твёрдой среде*).

С квантовой точки зрения звуковая волна в кристалле тоже квантуется – то есть может быть представлена, как поток гипотетических частиц. Это квазичастица под названием *фонон*. Дело в том, что энергия звуковой волны состоит из неделимых порций. И хотя эти порции энергии не связаны с конкретным материальным носителем, ведут они себя вполне независимо и проявляют все свойства частиц с точки зрения квантовой механики. Это связано с тем, что квантуются колебательные уровни энергии частиц – с точки зрения квантовой механики и вращательная и колебательная энергия частицы изменяется не непрерывно, а может принимать лишь дискретный набор значений.

Предполагается, что квазичастицы фонон принимает участие в процессах связанных с квантами гравитационного поля *гравитонами*.

В жидкости или газе механические волны могут быть только продольного типа: атомы или молекулы здесь не закреплены в каком-либо определённом положении. Возмущение, переданное частице (*попросту говоря, толчок*), может быть передано лишь другой частице, по направлению движения первой. Это соударение заставит первую частицу вернуться назад, а вторая частица передаст возмущение (*колебание*) дальше. Колебания в поперечном направлении в данном случае просто невозможны. Таким образом, звуковая волна будет представлять собой распространение в пространстве периодических сжатий и разрежений. В качестве параметров уравнения волны здесь мы можем использовать давление или плотность жидкости или газа.

Отношение скорости потока (*скорости течения жидкости или газа, скорости движения воздуха относительно летящего самолёта и т.д.*) к скорости звука в данной среде называется *числом Маха* (обозначается **M**). Число Маха играет большую роль в сверхзвуковом движении и т.д. Скорость, соответствующая *1 Маху* будет составлять для воздуха вблизи поверхности земли *340 м/с*. Это и есть скорость звука в воздухе.

Также в жидкой или газообразной среде могут распространяться *ударные волны*. Ударная волна – это также волна сжатия, только распространяющаяся со скоростью больше скорости звука в данной среде (*больше 1 Маха*). За счёт этого давление очень резко возрастает во фронте волны. С точки зрения термодинамики процессы в этом случае описываются адиабатическим уравнением.

Ударные волны могут возникать вследствие взрывных процессов, в частности *детонации взрывчатых веществ*. Ударная волна в зоне химического превращения называется *детонационной*. В этом случае волновой фронт, представляющий собой очень быстрое возрастание плотности и давление, называется плоскостью или поверхностью Чепмена-Жуге. В математических моделях предполагается, что давление здесь возрастает мгновенно, теснь скачком.

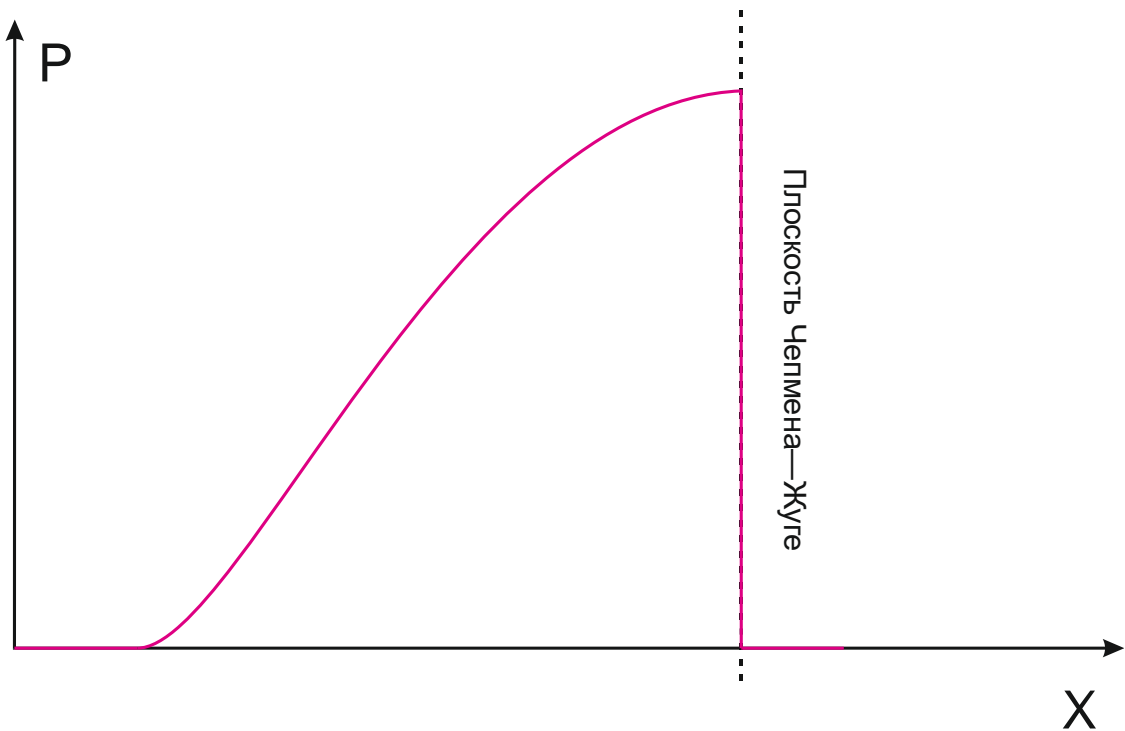


Рисунок 3.4

Зависимость давления P от координаты X в ударной волне

Другим видом ударных волн будут волны, расходящиеся от передней точки тела, движущегося со скоростью выше скорости звука. Скажем, волны, расходящиеся от носа самолёта летящего со скоростью, выше скорости звука. В системе координат, связанных с самолётом, такая волна будет казаться как бы «застывшей» — она не будет никуда распространяться и вообще менять свой вид. Такие волны называются *стационарными ударными волнами*.

Последним видом механических волн, который мы рассмотрим, будут волны на границе раздела фаз. Попросту, это волны на поверхности воды — обыкновенное волнение или шторм. Колебания поверхности воды при распространении волн носит периодический характер. Поэтому если море разволновалось — на нём появились волны, волнение будет продолжаться некоторое время, пока всё, в конце концов, не затихнет. Отдельный интерес здесь представляет волна Цунами — волна, возникающая в океане вследствие подводных землетрясений и извержений вулканов. Это огромная волна, уничтожающая города и побережья. Так вот эта волна есть солитон — структурно устойчивая уединённая волна. До и после цунами — абсолютный штиль. На фоне общего спокойствия вода сначала «уходит», оголяя огромный участок суши. Затем идёт собственно волна. После так же воцаряется полный штиль. Никакой периодичности.

Понятие солитона было введено американцами в 1965г. американцами Норманом Забуски и Мартином Крускалом. Но открыт солитон был инженером Джоном Скотом Расселом в 1834г. Он наблюдал за движением баржи на канале и заметил, как, когда баржа внезапно остановилась, от неё оторвалась одна волна и продолжила следовать самостоятельно, не меняя собственного вида (*в одиночку*). Эта волна оставила судно позади «катясь вперед с огромной скоростью и принимая форму большого одиночного возвышения, т.е. округлого, гладкого и четко выраженного водяного холма, который продолжал свой путь вдоль канала». Рассел погнался за волной на

лошади, нагнал... Но после лошадь устала и волна исчезла где-то впереди, так и не распавшись, не потеряв своей формы. Многие в поведении солитонов отлично от поведения других волн. В частности, встречаясь друг с другом, два солитона испытывают не интерференцию, а упругое соударение, как две частицы. Солитонные модели широко применяются в науке и технике, хотя их математическая модель весьма сложна.

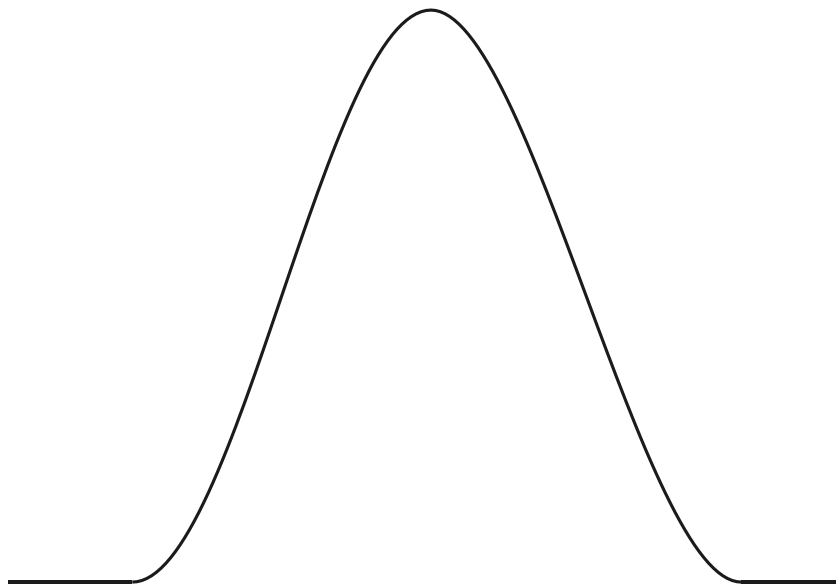


Рисунок 3.5
Солитон, как волна

3.3. Волны в упругой среде

3.3.1. Уравнение упругой волны

Выведем волновое уравнение для продольной и поперечной волн. Причём в первом случае сделаем это подробно, а во втором воспользуемся аналогией...

Для продольной волны

Волновое уравнение (динамическое уравнение волны). Рассмотрим тонкий стержень – цилиндр пренебрежимо малого сечения (в данном случае, по сравнению с длиной волны λ). И пусть через стержень проходит продольная волна, вызывая в n м сжатия или расширения:

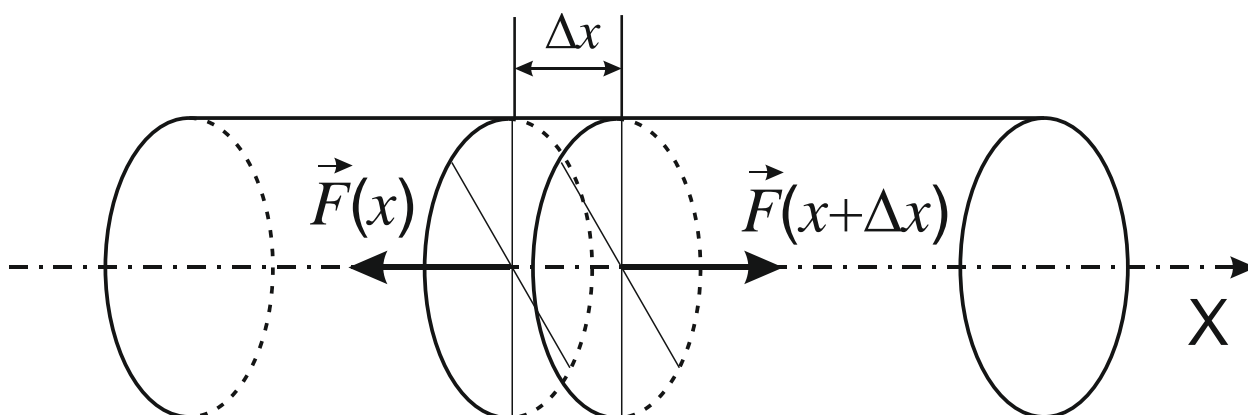


Рисунок 3.6

Действие сил в цилиндре при прохождении продольной волны

Воспользуемся *теорией упругости*. Для этого вспомним (*введём*) основные его понятия. Связь напряжения со сдвигом и модулем Юнга при поперечном сдвиге в упругой среде описывается *законом Гука*, задаваемым следующим уравнением:

$$\sigma = E\varepsilon, \quad (3.14)$$

где

$$\sigma = \frac{F}{S} \quad (3.15)$$

– напряжение (*по определению*);
(вообще говоря, тензор:

$$\sigma_{ij} = \begin{pmatrix} \sigma_{xx} & \tau_{xy} & \tau_{xz} \\ \tau_{yx} & \sigma_{yy} & \tau_{yz} \\ \tau_{zx} & \tau_{zy} & \sigma_{zz} \end{pmatrix},$$

но нас будет интересовать продольная составляющая, отвечающая за деформацию в направлении распространения волны – $\sigma = \sigma_{xx}$),

$$\varepsilon = \frac{\partial \xi}{\partial x} \quad (3.16)$$

– сдвиг в поперечном направлении (*по определению*);

$$E = \frac{F/S}{\Delta l/l} = \frac{Fl}{S\Delta l} \quad (3.17)$$

– модуль Юнга (*по определению*).

Подобную формулировку закона Гука можно получить из **следующих рассуждений**. Сила упругости в механике описывается законом Гука (*исходная формулировка*):

$$F = -kx, \quad (3.18)$$

где

F – сила, возникающая в результате упругой деформации;

k – коэффициент упругости;

x – удлинение либо сжатие пружины, стержня и т.д. (Знак « \rightarrow » говорит о том, что сила направлена в противоположную сторону удлинению или сжатию).

Причём *коэффициент упругости k* определяется через *модуль Юнга*:

$$k = \frac{ES}{l}, \quad (3.19)$$

где

E – модуль Юнга;

S – площадь поперечного сечения;

l – длина (*пружины, стержня...*).

Подставляя (3.19) в (3.18):

$$F = -kx = -\frac{ES}{l}x,$$

получим:

$$F = -\frac{ES}{l}x.$$

Поделим правую и левую часть на площадь:

$$\frac{F}{S} = -\frac{E}{l}x,$$

и немного поменяв последовательность сомножителей, имеем:

$$\frac{F}{S} = -E\frac{x}{l}.$$

Теперь вспомним определение механического напряжения (3.15) и учтём тот факт, что в этом определении фигурируют внутренние силы упругого напряжения, а мы перейдём к внешним силам (они по *III закону Ньютона* имеют обратный знак):

$$\left. \begin{aligned} \frac{F}{S} &= -E\frac{x}{l} \\ \sigma &= \frac{F_{\text{Внутр.}}}{S} = \frac{-F_{\text{Внешних}}}{S} \\ F_{\text{Внешних}} &= F \end{aligned} \right\} \Rightarrow \sigma = E\frac{x}{l}.$$

И так мы заменили отношение силы к площади сечения на напряжение.

Теперь рассмотрим правую часть уравнения и переобозначим смещение x (в таком виде оно фигурировало в законе Гука) на ξ (так смещение обозначается в теории сплошных сред и теории механических волн). Заодно переобозначим длину l , как x :

$$\left. \begin{aligned} \sigma &= E\frac{x}{l} \\ x &\rightarrow \xi \\ l &\rightarrow x \end{aligned} \right\} \Rightarrow \sigma = E\frac{\xi}{x}.$$

Осталось перейти от конечно величины смещения и длины к бесконечно малым приращениям (*элементарным величинам*):

$$\left. \begin{array}{l} \sigma = E \frac{\xi}{x} \\ \xi \rightarrow d\xi \\ x \rightarrow dx \end{array} \right\} \Rightarrow \sigma = E \frac{d\xi}{dx} .$$

Вспоминая определение деформации (3.16), заменим в правой части соотношение $\frac{\partial \xi}{\partial x}$ на ε :

$$\left. \begin{array}{l} \sigma = E \frac{d\xi}{dx} \\ \varepsilon = \frac{d\xi}{dx} \end{array} \right\} \Rightarrow \sigma = E\varepsilon .$$

Получили искомое соотношение:

$$\sigma = E\varepsilon .$$

И так *вернёмся к выводу уравнения волны*. Из определения механического напряжения (3.15) следует:

$$\sigma = \frac{F}{S} \Rightarrow F(x) = S\sigma(x) . \quad (3.20)$$

Распишем силу, действующую на элемент объёма:

$$\Delta V = \Delta x \cdot S ,$$

имеющий массу:

$$m = \rho \Delta V = \rho \cdot \Delta x \cdot S ,$$

через II закон Ньютона:

$$m\bar{a} = \sum \bar{F} .$$

При этом учтём, что на данный элемент объёма будут действовать две силы с двух его концов (*причём в разных направлениях, сжимающая или растягивающая его*):

$$\vec{F}_x(x + \Delta x) \quad \text{— в конце,}$$

и

$$\vec{F}_x(x) \quad \text{в начале.}$$

Результирующая сила будет их суммой. Тогда II закон Ньютона примет вид:

$$\underbrace{\rho \Delta x S}_m \underbrace{\vec{\xi}}_a = \vec{F}_x(x + \Delta x) + \vec{F}_x(x) . \quad (3.21)$$

Отсюда:

$$\left| \vec{F}_x(x + \Delta x) + \vec{F}_x(x) \right| = F_x(x + \Delta x) - F_x(x) .$$

Учитывая закон следующую из определения механического напряжения формулу (3.20), полученную разность сил можно расписать, как:

$$F_x(x + \Delta x) - F_x(x) = S\sigma(x + \Delta x) - S\sigma(x) = \\ = S(\sigma(x + \Delta x) - \sigma(x)).$$

При малых значениях Δx можно произвести следующую замену:

$$\sigma(x + \Delta x) - \sigma(x) = \frac{\partial \sigma}{\partial x} \Delta x.$$

Тогда последнее выражение преобразуется следующим образом:

$$F_x(x + \Delta x) - F_x(x) = S(\sigma(x + \Delta x) - \sigma(x)) = S \frac{\partial \sigma}{\partial x} \Delta x.$$

Теперь вспомним закон Гука в формулировке, указанной в начале раздела – (3.14), и подставим вместо механического напряжения его выражение из этого закона:

$$F_x(x + \Delta x) - F_x(x) = S \frac{\partial \sigma}{\partial x} \Delta x = S \frac{\partial (E\varepsilon)}{\partial x} \Delta x = SE \frac{\partial \varepsilon}{\partial x} \Delta x.$$

Вместо сдвига ε подставим его значение по определению (*выражение (3.16)*) и две производных по координате x на вторую производную:

$$F_x(x + \Delta x) - F_x(x) = SE \frac{\partial \varepsilon}{\partial x} \Delta x = SE \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial \xi}{\partial x} \right) \Delta x = SE \frac{\partial^2 \xi}{\partial x^2} \Delta x.$$

Осталось подставить полученное выражение во II закон Ньютона – формулу (3.21):

$$\rho \Delta x \cancel{\delta} \ddot{\xi} = \cancel{\delta} E \frac{\partial^2 \xi}{\partial x^2} \Delta x.$$

Уравнение примет вид:

$$\rho \frac{\partial^2 \xi}{\partial t^2} = E \frac{\partial^2 \xi}{\partial x^2}$$

Или, разрешая его относительно второй производной:

$$\frac{\partial^2 \xi}{\partial x^2} = \frac{\rho}{E} \frac{\partial^2 \xi}{\partial t^2} \quad (3.22)$$

– это и есть *динамическое уравнение поперечной волны в упругой среде. Скорость волны (продольной):*

$$v_\phi = \sqrt{E/\rho}. \quad (3.23)$$

Значение для скорости волны получаем, сравнивая полученное уравнение с волновым уравнением:

$$\frac{\partial^2 \xi}{\partial x^2} = \frac{1}{v^2} \frac{\partial^2 \xi}{\partial t^2}.$$

Кинетическое уравнение волны. Его получим, зная, что оно должно иметь следующий вид:

$$\frac{\partial \xi}{\partial x} = \frac{1}{v_{\phi}} \frac{\partial \xi}{\partial t} .$$

В результате имеем *кинетическое уравнение продольной волны*:

$$\frac{\partial \xi}{\partial x} = \sqrt{E/\rho} \frac{\partial \xi}{\partial t} . \quad (3.24)$$

Для поперечной волны. Для неё уравнение можно получить аналогичным образом, зная, что вместо модуля Юнга здесь надо использовать модуль (*поперечного*) сдвига:

$$v_{\phi} = \sqrt{G/\rho} , \quad (3.25)$$

где

$$G = \frac{F/S}{\Delta x/l} = \frac{Fl}{S\Delta x} ,$$

G – модуль сдвига.
При этом:

$$G = \frac{E}{2(1+\nu)} , \quad (3.26)$$

где

ν – коэффициент Пуассона.

Обычно модуль Юнга сильно больше модуля сдвига. Вследствие этого получаем следующее соотношение:

$$E > G \Rightarrow v_{\text{продольной}} > v_{\text{поперечной}} .$$

3.3.2. Энергия упругой волны

Определим *объёмную плотность энергии* в волне.

Для этого рассчитаем работу силы упругости по закону Гука:

$$F = -kx ,$$

$$A = \int_0^{x_1} F(x) dx = \int_0^x -kx dx = -\frac{kx^2}{2} .$$

Здесь

$$U = \frac{kx^2}{2} \quad \text{– потенциальная энергия в волне.}$$

Её объёмная плотность будет равна:

$$w_n = \frac{U}{V} .$$

Используя выражение для силы через механическое напряжение (3.20), полученное из определения напряжения (3.15):

$$F = kx = \sigma S ,$$

и, вводя переобозначения:

$$\left. \begin{array}{l} \varepsilon = \frac{\partial \xi}{\partial x} \\ \xi \rightarrow x \\ x \rightarrow l \end{array} \right\} \Rightarrow \varepsilon = \frac{x}{l} ,$$

$$\varepsilon = \frac{x}{l} \Rightarrow x = \varepsilon l ,$$

получаем:

$$U = \frac{kx^2}{2} = \frac{kx \cdot x}{2} = \frac{F \cdot x}{2} = \frac{\sigma S \cdot x}{2} = \frac{\sigma \cdot S \cdot \varepsilon l}{2} .$$

Здесь мы в выражении для потенциальной энергии заменили произведение kx^2 на произведение $F_{\text{упр}} \cdot x$:

$$kx^2 = \underbrace{kx}_{F_{\text{упр}}} \cdot x = F_{\text{упр}} \cdot x ,$$

Тогда, продолжая рассуждения, получим:

$$U = \dots = \frac{\sigma \cdot S \cdot \varepsilon l}{2} = \frac{E \varepsilon \cdot S \cdot \varepsilon l}{2} = \frac{E \varepsilon^2}{2} S l = \frac{E \varepsilon^2}{2} V .$$

Здесь мы использовали выражение закона Гука через модуль Юнга:

$$\sigma = E \varepsilon .$$

Перейдём к объёмной плотности энергии:

$$w_n = \frac{U}{V} = \frac{E\varepsilon^2}{2} \cdot \frac{1}{\cancel{V}} = \frac{E\varepsilon^2}{2}. \quad (3.27)$$

Вспоминая уже полученное выражение для фазовой скорости, можем выразит через неё модуль Юнга:

$$v = \sqrt{E/\rho},$$

$$v_\phi^2 = E/\rho \Rightarrow E = \rho v_\phi^2.$$

Тогда в выражении для объёмной плотности энергии будем иметь:

$$w_n = \frac{E\varepsilon^2}{2} = \frac{\rho v_\phi^2 \varepsilon^2}{2} = v_\phi^2 \frac{\rho \varepsilon^2}{2}.$$

Учитывая, что

$$\varepsilon = \frac{\partial \xi}{\partial x},$$

получим:

$$w_n = v_\phi^2 \frac{\rho \varepsilon^2}{2} = \frac{\rho}{2} v_\phi^2 \left(\frac{\partial \xi}{\partial x} \right)^2.$$

Это *потенциальная составляющая энергии*.

Теперь немного поработаем с выражением для кинетической энергии и преобразуем его через плотность:

$$T = \frac{mv^2}{2} \Rightarrow$$

$$w_\kappa = \frac{\left(\frac{mv^2}{2} \right)}{V} = \frac{(m/V)v^2}{2} = \frac{(m/V)v^2}{2} = \frac{\rho v^2}{2}.$$

Тогда для плотности энергии в волне *кинетическая составляющая* примет вид:

$$w_\kappa = \frac{\rho v^2}{2} = \frac{\rho}{2} \left(\frac{\partial \xi}{\partial t} \right)^2.$$

Полная плотность энергии волны будет равна сумме кинетической и потенциальной:

$$w = w_\kappa + w_n = \frac{\rho}{2} \left(\frac{\partial \xi}{\partial t} \right)^2 + \frac{\rho}{2} v_\phi^2 \left(\frac{\partial \xi}{\partial x} \right)^2 =$$

$$= \frac{\rho}{2} \left(\left(\frac{\partial \xi}{\partial t} \right)^2 + v_\phi^2 \left(\frac{\partial \xi}{\partial x} \right)^2 \right) = \frac{\rho}{2} \left(\left(\frac{\partial \xi}{\partial t} \right)^2 + v_\phi^2 \left(\frac{\partial \xi}{\partial x} \right)^2 \right).$$

Подставляя кинетическое уравнение волны, получим:

$$\frac{\partial \xi}{\partial x} = \frac{1}{v_\phi} \frac{\partial \xi}{\partial t} \Rightarrow$$

$$\left(\frac{\partial \xi}{\partial x}\right)^2 = \frac{1}{v_\phi^2} \left(\frac{\partial \xi}{\partial t}\right)^2 \Rightarrow \left(\frac{\partial \xi}{\partial t}\right)^2 = v_\phi^2 \left(\frac{\partial \xi}{\partial x}\right)^2,$$

$$w = \frac{\rho}{2} \left(\left(\frac{\partial \xi}{\partial t}\right)^2 + v_\phi^2 \left(\frac{\partial \xi}{\partial x}\right)^2 \right) = \frac{\rho}{2} \left(\left(\frac{\partial \xi}{\partial t}\right)^2 + \left(\frac{\partial \xi}{\partial t}\right)^2 \right) =$$

$$= \frac{\rho}{2} \cdot 2 \left(\frac{\partial \xi}{\partial t}\right)^2 = \rho \left(\frac{\partial \xi}{\partial t}\right)^2 = \rho \dot{\xi}^2.$$

Если учесть, что колебания в волне происходят по гармоническому закону:

$$\xi = A \cos(\omega t - kx),$$

получим:

$$w = \rho \dot{\xi}^2 = \rho (-A\omega \sin(\omega t - kx))^2 =$$

$$= \frac{\rho}{2} \cdot 2 \left(\frac{\partial \xi}{\partial t}\right)^2 = \rho \left(\frac{\partial \xi}{\partial t}\right)^2 = \rho \dot{\xi}^2.$$

Или:

$$\xi = A \cos(\omega t - kx),$$

$$w = \rho \dot{\xi}^2 = \rho (-A\omega \sin(\omega t - kx))^2 =$$

$$= \rho A^2 \omega^2 \sin^2(\omega t - kx).$$

В заключении усредним квадрат синуса по периоду $\left(\frac{\int_0^{2\pi} \sin^2 x dx}{2\pi - 0} = \frac{1}{2} \right)$.

Получим выражение для средней энергии в продольной волне:

$$\langle w \rangle = \frac{\rho A^2 \omega^2}{2}. \quad (3.28)$$

Плотность потока энергии – вектор Умова, задаваемый выражением:

$$\vec{j} = w \vec{v},$$

в этом случае будет иметь вид:

$$\langle \vec{j} \rangle = \frac{1}{2} \rho A^2 \omega^2 \vec{v}. \quad (3.29)$$

3.4. Волны в жидкости и газе

Волны в жидкой и газовой среде называются *звуковыми* (это, как мы сказали, продольные волны – поперечных там быть не может). Вообще говоря, они делятся на звук, инфразвук, ультразвук. При этом только звук воспринимается человеческим ухом. Хотя и ультра- и инфразвук оказывают серьёзное влияние на организм.

Частота *инфразвука* меньше частоты, воспринимаемой человеческим ухом. За счёт совпадения его частот с частотами внутренних колебаний человеческого организма его воздействие может вызывать беспричинный панический страх и в итоге приводить к кровоизлиянию в мозг.

Ультразвук по частоте больше частоты, воспринимаемой человеческим ухом. И хотя он не имеет таких пагубных воздействий, может вызывать болевые ощущения (*воздействием на слуховую системы*). При этом человек не будет осознавать причин этой боли, поскольку сам себе не будет слышен ему.

По частотам картина выглядит следующим образом:

- собственно звук $\nu=20\text{--}20000$ Гц,
- инфразвук: $\nu < 20$ Гц,
- ультразвук: $\nu > 20$ кГц.

3.4.1. Уравнение звуковой волны

Первый вариант вывода уравнения – абсолютно точный вывод.

Рассмотрим газовый цилиндр (*вырежем в газовой среде цилиндр*), через который проходит звуковая волна. Давление на обоих концах этого цилиндра будет отличаться за счёт прироста давления в ходе прохождения волны (аналогично **Рисунок 3.6**):

$$P' = P + \Delta P.$$

Масса газа в этом цилиндре:

$$m = \rho S \Delta X.$$

Ускорение в ходе колебательного движения молекул газа при прохождении волны – есть вторая производная от смещения:

$$a = \frac{\partial^2 \xi}{\partial t^2}.$$

Сила определяется, как прирост давления на площадь сечения, на которое действует это давление:

$$F = \Delta P \Delta x = - \underbrace{\frac{\partial P'}{\partial x}}_{\Delta P} S \Delta x.$$

Запишем II закон Ньютона и подставим все это туда:

$$ma = F \Rightarrow$$
$$(\rho S \Delta X) \frac{\partial^2 \xi}{\partial t^2} = - \frac{\partial P'}{\partial x} S \Delta x.$$

После сокращения получаем:

$$\rho \frac{\partial^2 \xi}{\partial t^2} = - \frac{\partial P'}{\partial x}.$$

Теперь обратимся к термодинамике. Процессы при прохождении волны можно считать *адиабатными* – протекающими без обмена теплом с окружающей средой (за счёт того, что они протекают достаточно быстро). Тогда справедливо уравнение Пуассона:

$$PV^\gamma = const,$$

$$PV^\gamma = P'V'^\gamma.$$

Для объёма нашего цилиндра имеем:

$$P(S\Delta x)^\gamma = P'(S(\Delta x + \Delta\xi))^\gamma.$$

Учитывая смещение молекул при движении волны, пересчитаем второе давление:

$$P'(S(\Delta x + \Delta\xi))^\gamma = P'\left(S\left(\Delta x + \frac{\partial\xi}{\partial x}\Delta x\right)\right)^\gamma =$$

$$= P'\left(S\Delta x\left(1 + \frac{\partial\xi}{\partial x}\right)\right)^\gamma = P'(S\Delta x)^\gamma\left(1 + \frac{\partial\xi}{\partial x}\right)^\gamma,$$

$$\cancel{P(S\Delta x)^\gamma} = P'\cancel{(S\Delta x)^\gamma}\left(1 + \frac{\partial\xi}{\partial x}\right)^\gamma.$$

Получили:

$$P = P'\left(1 + \frac{\partial\xi}{\partial x}\right)^\gamma.$$

Смещение мало, поэтому:

$$\frac{\partial\xi}{\partial x} \ll 1 \Rightarrow \left(1 + \frac{\partial\xi}{\partial x}\right)^\gamma \approx \left(1 + \gamma \frac{\partial\xi}{\partial x}\right),$$

$$P = P'\left(1 + \gamma \frac{\partial\xi}{\partial x}\right)$$

Преобразуем (выразим второе давление через первое):

$$P' = \frac{P}{1 + \gamma \frac{\partial\xi}{\partial x}} \approx P\left(1 - \gamma \frac{\partial\xi}{\partial x}\right).$$

Здесь мы использовали следующее приближённое равенство:

$$\left(x \ll 1 \Rightarrow \frac{1}{1+x} \approx 1-x\right).$$

Приращение давления в итоге будет равно:

$$\begin{aligned}\Delta P &= P' - P = P \left(1 - \gamma \frac{\partial \xi}{\partial x} \right) - P = \\ &= P - P\gamma \frac{\partial \xi}{\partial x} - P = -P\gamma \frac{\partial \xi}{\partial x}, \\ \Delta P &= -P\gamma \frac{\partial \xi}{\partial x}.\end{aligned}$$

А относительное приращение давления составит:

$$\frac{\Delta P}{P} = -\gamma \frac{\partial \xi}{\partial x}.$$

Поскольку показатель адиабаты близок к $\mathbf{1}$, получим:

$$\gamma \approx 1 \Rightarrow \left| \frac{\Delta P}{P} \right| \approx \left| \frac{\partial \xi}{\partial x} \right|.$$

Теперь вернёмся к соотношению между давлениями на двух концах цилиндра и продифференцируем его:

$$\begin{aligned}P' &= P \left(1 - \gamma \frac{\partial \xi}{\partial x} \right) \left| \frac{\partial}{\partial x} \right., \\ \frac{\partial P'}{\partial x} &= \frac{\partial}{\partial x} \left(P \left(1 - \gamma \frac{\partial \xi}{\partial x} \right) \right).\end{aligned}$$

Преобразуем:

$$\frac{\partial P'}{\partial x} = P \frac{\partial}{\partial x} \left(1 - \gamma \frac{\partial \xi}{\partial x} \right).$$

Производная от скобок равна производной второго слагаемого (*вторая производная смещения*) так как производная $\mathbf{1}$ равна $\mathbf{0}$:

$$\frac{\partial P'}{\partial x} = -P\gamma \frac{\partial^2 \xi}{\partial x^2}.$$

Объединим вместе уравнения, полученные в первой и во второй части вывода:

$$\begin{cases} \rho \frac{\partial^2 \xi}{\partial t^2} = -\frac{\partial P'}{\partial x} \\ \frac{\partial P'}{\partial x} = -P\gamma \frac{\partial^2 \xi}{\partial x^2} \end{cases} \Rightarrow \rho \frac{\partial^2 \xi}{\partial t^2} = P\gamma \frac{\partial^2 \xi}{\partial x^2}.$$

Мы получили уравнение волны (*динамическое волновое уравнение*):

$$\frac{\partial^2 \xi}{\partial t^2} = \frac{P\gamma}{\rho} \frac{\partial^2 \xi}{\partial x^2}. \quad (3.30)$$

Фазовая скорость волны в этом случае (*формула Лапласа*):

$$v_\phi = \sqrt{\gamma \frac{P}{\rho}}. \quad (3.31)$$

Второй вариант вывода уравнения – вывод «по аналогии».

В принципе, можно поступить проще. Можно в уравнении для упругой продольной волны произвести следующие замены (*перейдём к относительным единицам*):

- рассмотрим вместо силы силу, действующую на единицу площади – то есть давление:

$$\Delta P \equiv F,$$

- вместо удлинения, рассмотрим относительное смещение:

$$\Delta x \equiv \Delta \xi / \Delta x,$$

- тогда закон Гука примет вид:

$$\Delta P = -E \Delta \xi / \Delta x.$$

Умножим и поделим правую часть на площадь

$$\Delta P = -E \frac{\Delta \xi}{\Delta x} \cdot \frac{S}{S}.$$

В числителе получим изменение объёма

$$\Delta V = \Delta \xi S,$$

а в знаменателе – сам объём:

$$V = \Delta x S.$$

Тогда:

$$\Delta P = -E \frac{\Delta V}{V}.$$

Теперь выразим из этого уравнения модуль Юнга:

$$E = -V \frac{\Delta P}{\Delta V}.$$

И перейдём к дифференциалам (*к элементарным величинам*):

$$E = -V \frac{dP}{dV}.$$

Теперь вспомним термодинамику. В ходе процесса масса не изменяется, следовательно:

$$\left. \begin{array}{l} \rho = \frac{m}{V} \\ m = const \end{array} \right\} \Rightarrow m = \rho V = const.$$

Тогда:

$$\left. \begin{aligned} d(\rho V) &= 0 \\ d(\rho V) &= Vd\rho + \rho dV \end{aligned} \right\} \Rightarrow Vd\rho + \rho dV = 0,$$

$$Vd\rho = -\rho dV.$$

Выразим из последнего выражения элементарное изменение объёма:

$$dV = -V \frac{d\rho}{\rho}.$$

Теперь подставим получившиеся выражение в выражение для модуля Юнга. Получим *физический смысл модуля Юнга в звуковой волне*:

$$E = -V \frac{dP}{dV} = \cancel{V} \frac{dP}{\left(\cancel{V} \frac{d\rho}{\rho} \right)} = \rho \frac{dP}{d\rho}.$$

Теперь воспользуемся формулой для фазовой скорости в упругой волне и воспользуемся полученным *физическим смыслом модуля Юнга*:

$$v_\phi = \sqrt{\frac{E}{\rho}} = \sqrt{\frac{\cancel{\rho} \frac{dP}{d\rho}}{\cancel{\rho}}} = \sqrt{\frac{dP}{d\rho}}.$$

Нам осталось определить значение выражения под корнем. Процессы в звуковой волне с точки зрения термодинамики можно считать адиабатными – то есть протекающими без обмена теплотой с окружающей средой. Это так, поскольку колебательный процесс протекает достаточно быстро по сравнению с процессами теплообмена. Тогда для него справедливо *уравнение Пуассона*:

$$PV^\gamma = const.$$

Продифференцируем его

$$d(PV^\gamma) = 0,$$

$$\frac{d(PV^\gamma)}{dP} dP + \frac{d(PV^\gamma)}{dV} dV = 0,$$

$$V^\gamma dP + P \cdot \gamma V^{\gamma-1} dV = 0,$$

Разделим переменные и произведём сокращение:

$$\frac{dP}{P} + \gamma \frac{\cancel{V^{\gamma-1}} dV}{\cancel{V^{\gamma-1}}} = 0,$$

$$\frac{dP}{P} + \gamma \frac{dV}{V} = 0.$$

А теперь выделим в левой части производную давления по объёму:

$$\frac{dP}{dV} = -\gamma \frac{P}{V}.$$

Тогда в выражение, описывающее физический смысл модуля Юнга вместо производной давления по объёму (*выражение, полученное после первого знака равенства*) подставим полученное выражение, получим:

$$E = -V \frac{dP}{dV} = -V \left(-\gamma \frac{P}{V} \right) = \gamma P.$$

В итоге фазовая скорость звуковой волны будет иметь следующее выражение:

$$v_{\phi} = \sqrt{\frac{E}{\rho}} = \sqrt{\frac{dP}{d\rho}} = \sqrt{\gamma \frac{P}{\rho}}.$$

Расчёт скорости звука для воздуха. Рассмотрим более подробно скорость звуковой волны в воздухе. Как мы показали, она определяется следующей формулой:

$$v_{\phi} = \sqrt{\gamma \frac{P}{\rho}}.$$

Возьмем уравнение состояния идеального газа (*уравнение Менделеева-Клайперона*):

$$PV = \frac{m}{\mu} RT,$$

и выразим из него *плотность газа*:

$$\rho = \frac{m}{V} = \frac{\mu P}{RT}.$$

Подставим в уравнение для скорости волны:

$$v_{\phi} = \sqrt{\gamma \frac{R \cdot RT}{\mu R}}.$$

Получим выражение для скорости звука в идеальном газе:

$$v_{\phi} = \sqrt{\frac{\gamma RT}{\mu}}. \quad (3.32)$$

Если вспомнить выражение для среднеарифметической скорости молекулы (*всё это будет рассматриваться чуть позже в разделе «теория макросистем»*), то фазовую скорость волны можно выразить через среднеарифметическую скорость движения молекул:

$$\langle v_{\text{мол.}} \rangle = \sqrt{\frac{8RT}{\pi\mu}} \Rightarrow$$

$$v = \langle v_{\text{мол.}} \rangle \sqrt{\frac{\gamma\pi}{8}} . \quad (3.33)$$

Окончательно мы получили значение фазовой скорости звуковой волны в воздухе – число Маха:

$$v = \sqrt{\frac{\gamma RT}{\mu}} = \sqrt{\frac{1.40 \cdot 8.31 \cdot 290}{29 \cdot 10^{-3}}} = 340 \text{ м/с} . \quad (3.34)$$

3.4.2. Энергия звуковой волны

Теперь рассмотрим *энергию звуковой волны* (точнее *объёмную плотность энергии*). Энергия в волне равна сумме кинетической и потенциальной энергий:

$$W = W_n + W_k .$$

Вычислим *кинетическую энергию*:

$$w_k = \frac{W_{\text{кинетическая}}}{V} = \frac{\left(\frac{mv^2}{2}\right)}{V} = \frac{mv^2}{2V} = \frac{m/V \cdot v^2}{2} = \frac{\rho v_{\text{частиц}}^2}{2}$$

В итоге *кинетическая энергия* равна:

$$w_k = \frac{\rho v_{\text{частиц}}^2}{2} \quad (3.35)$$

где $v_{\text{частиц}}$ – есть скорость смещения молекул при движении волны (*производная от смещения*):

$$v = \frac{\partial \xi}{\partial t} .$$

Вычислим *потенциальную энергию* звуковой волны ($P' = P_{\text{мн.}} - P_{\text{атм.}} = \Delta P = P_{\text{звука}}$), будем опять-таки следовать логике подобия звуковых и упругих волн.

Вкратце повторим вывод формулы (3.27). Для этого рассмотрим закон Гука

$$F = -kx$$

И перепишем его в относительных величинах (напряжение σ , модуль Юнга E , относительное удлинение ε)

$$\sigma = \frac{F}{V} = -\frac{kx}{V} = -\underbrace{\frac{k}{S}}_E \underbrace{\frac{x}{l}}_\varepsilon = -E\varepsilon,$$

где

$$\sigma = \frac{F}{V}, w = \frac{U}{V}, E = \frac{k}{S}, \varepsilon = \frac{x}{l}$$

Тогда потенциальную энергию можно записать, как:

$$U = \frac{kx^2}{2} = \frac{Fx}{2} = \frac{E\varepsilon^2}{2}Sl$$

А выражение для плотности энергии примет вид:

$$w = \frac{U}{V} = \frac{E\varepsilon^2}{2},$$

$$w = \frac{E\varepsilon^2}{2}.$$

Повторив вывод выражения для плотности энергии упругой волны, продолжим рассуждения. Принимая во внимание аналогию величин для упругой и звуковой волн,

$$\Delta P \equiv F,$$

$$\Delta x \equiv \Delta \xi / \Delta x = \varepsilon,$$

Получим закон Гука в новых величинах:

$$\Delta P = -E \Delta \xi / \Delta x = -E\varepsilon,$$

$$\Delta P = -E\varepsilon.$$

И, возведя в квадрат, будем иметь:

$$\varepsilon^2 = \frac{\Delta P^2}{E^2}.$$

Тогда, подставляя в уже имеющееся выражение для плотности потенциальной энергии, получаем выражение для плотности потенциальной энергии звуковой волны:

$$w_n = \frac{E\varepsilon^2}{2} = \frac{E\Delta P^2}{2E^2} = \frac{\Delta P^2}{2E} \quad (3.36)$$

Теперь избавимся от модуля Юнга E в этом выражении. Для этого вспомним выражение для фазовой скорости упругой волны через модуль Юнга E и плотность ρ (3.23)

$$v_\phi = \sqrt{\frac{E}{\rho}}$$

и выразим из него модуль Юнга:

$$E = \rho v_{\phi}^2$$

И, подставляя в выражение для плотности потенциальной энергии (3.36), получим:

$$w_n = \frac{\Delta P^2}{2E} = \frac{\Delta P^2}{2\rho v_{\phi}^2} = \frac{P_{\text{звука}}^2}{2\rho v_{\text{звука}}^2} = \frac{\beta P_{\text{звука}}^2}{2}$$

И так, *потенциальная энергия* равна

$$w_n = \frac{\beta P'^2}{2}, \quad (3.37)$$

где

$$\beta = \frac{1}{\rho v_{\text{звука}}^2} \quad (3.38)$$

– сжимаемость газа.

Окончательно суммарная энергия волны будет равна:

$$w = \frac{\rho v^2}{2} + \frac{\beta P'^2}{2}. \quad (3.39)$$

Можно показать, что (в любой волне по закону сохранения энергии – в ходе колебательно процесса энергия переходит из кинетической в потенциальную и назад):

$$w_n = w_k.$$

$$\frac{\rho v^2}{2} = \frac{\beta P'^2}{2}. \quad (3.40)$$

Тогда:

$$w = \beta P'^2 = \rho v_{\text{частицы}}^2 = \rho \dot{\xi}^2. \quad (3.41)$$

Для стоячей звуковой волны

- Это стационарная последовательность сжатий и разрежений (*никуда не движется*).
- Для неё можно наблюдать явление так называемой *акусто-оптической дифракции* – вместе с изменением плотности газа или жидкости изменяется и показатель преломления. Такая среда начинает вести себя, как дифракционная решётка, о которой пойдёт речь в разделе «волновая оптика».

Энергия для стоячей волны примет вид:

$$w_k = \frac{1}{8} \beta P^2 (1 - \cos 2kx), \quad (3.42)$$

$$w_n = \frac{1}{8} \beta P^2 (1 + \cos 2kx), \quad (3.43)$$

где

w_k – имеет максимум в узле,

w_n – имеет максимум в пучности.

3.4.3. Звуковое давление и интенсивность звука

Сначала найдём выражение для звукового давления. Напомним, что под звуковым давлением мы понимаем разность между амплитудным давлением в звуковой волне и давлением при невозмущённом состоянии газа:

$$P_{\text{звука}} = P_{\text{мгн.}} - P_{\text{атм.}} = \Delta P = P'.$$

Поскольку в волне этот параметр изменяется со временем

$$\Delta P = P(t),$$

за его значение будем принимать *действующее значение давления*:

$$P_{\text{звука}} = \frac{P_{\text{max}}}{\sqrt{2}}.$$

И сразу заметим, что

$$P_{\text{звука}}^2 = \frac{P_{\text{max}}^2}{2}.$$

Из равенства плотности потенциальной и кинетической энергий в звуковой волне (3.40) имеем

$$w_n = w_k \Rightarrow \beta P_{\text{звука}}^2 = \rho v_{\text{частицы}}^2.$$

Подставим значение β :

$$\frac{P_{\text{звука}}^2}{\rho v_{\text{звука}}^2} = \rho v_{\text{частицы}}^2.$$

Тогда

$$P_{\text{звука}}^2 = \rho^2 v_{\text{частицы}}^2 v_{\text{звука}}^2,$$

$$\sqrt{P_{\text{звука}}^2} = \sqrt{\rho^2 v_{\text{частицы}}^2 v_{\text{звука}}^2}.$$

Получили выражение для звукового давления

$$P_{\text{звука}} = \rho v_{\text{частицы}} v_{\text{звука}}. \quad (3.44)$$

Под интенсивностью волны, как и раньше, будем понимать плотность потока энергии в этой волне:

$$I = \frac{\Phi_w}{S} = \frac{W}{S_{\perp} t} = w v_{\text{волны}}.$$

Тогда, следуя уравнению Умова (3.9), для звуковой волны получим

$$I = \frac{\Phi}{S_{\perp}} = wv_{\text{волны}} = \rho v_{\text{частицы}}^2 v_{\text{звука}}. \quad (3.45)$$

Подставляя в эту формулу значение плотности энергии звуковой волны, выраженную через звуковое давление, будем иметь:

$$I = wv_{\text{волны}} = \frac{P^2 v_{\text{звука}}}{\rho v_{\text{звука}}^2} = \frac{P^2}{\rho v_{\text{звука}}}$$

Иначе. Используя формулы (3.44) и (3.45), получим:

$$\begin{aligned} I &= \rho v_{\text{частицы}}^2 v_{\text{звука}} = \rho v_{\text{частицы}} v_{\text{частицы}} v_{\text{звука}} = \\ &= \underbrace{\rho v_{\text{частицы}} v_{\text{частицы}}}_{P} v_{\text{звука}} = P v_{\text{частицы}}. \end{aligned}$$

Тогда связь *интенсивности звуковой волны* и *звукового давления* можно выразить следующими соотношениями:

$$I = P v_{\text{частиц}} = \frac{P^2}{\rho v_{\text{звука}}} = \frac{P^2}{Z_s},$$

где

$$Z_s = \frac{P}{v_{\text{частиц}}} = \rho v_{\text{звука}}$$

– звуковое сопротивление или звуковой импеданс.

Ещё раз о переходе от одной формулировки к другой:

$$I = \frac{P^2}{\rho v_{\text{звука}}} = \frac{\rho^2 v_{\text{частиц}}^2 v_{\text{звука}}^2}{\rho v_{\text{звука}}} = \frac{v_{\text{частиц}}^2 Z_s^2}{Z_s} = v_{\text{частиц}}^2 Z_s,$$

$$I = P v_{\text{частиц}} = \frac{P^2}{Z_s} = v_{\text{частиц}}^2 Z_s.$$

Или в выражении через максимальное давление:

$$I = \frac{P_{\text{max}}^2}{2\rho v_{\text{звука}}} = \frac{P_{\text{max}}^2}{2Z_s} = \frac{v_{\text{частиц}}^2 Z_s}{2Z_s} = \frac{P_{\text{max}} v_{\text{частиц}}}{2}$$

3.4.4. Психофизические характеристики звука

С психофизиологической точки зрения звук характеризуется следующими параметрами:

- тон – основная частота звука, которую и воспринимает ухо,
- тембр – окрас звука, создаваемый,
- громкость – интенсивность звуковой волны, воспринимаемая ухом

Ещё раз напомним, что по частотному диапазону:

- звук $v=20-20000$ Гц
- инфразвук: $v < 20$ Гц
- ультразвук: $v > 20$ кГц

Закон Вебера-Фехнера.

Это эмпирический психофизиологический закон на основе ряда экспериментов Эрнста Вебера, обобщённых Густавом Фехнером, гласящий, что человек воспринимает внешние раздражители в экспоненциальном масштабе (*экспоненциальной шкале*). Это можно записать в виде следующей формулы:

$$p = k \ln \frac{S}{S_0}, \quad (3.46)$$

где

p – сила ощущений,

S – величина раздражающего фактора,

S_0 – нижняя граница ощущений раздражающего фактора,

k – константа, зависящая от субъекта ощущений.

Таким образом для того, чтобы степень воздействия (сила ощущений) изменялась линейно, рассматривать раздражающий фактор нужно в *логарифмическом масштабе*.

И ещё. При рассмотрении линейно изменяющихся величин и разбиении некоторого диапазона на равные части, мы обычно используем арифметическую прогрессию – каждая следующая граница диапазона равна предыдущей, плюс некоторый определённый шаг:

$$a_{i+1} = a_i + k, \quad k \equiv \Delta a$$

В данном случае, для разбиения диапазона на равные, части нужно пользоваться геометрической прогрессией:

$$b_{i+1} = b_i \cdot q.$$

Также среднее значение для диапазона в этом случае будет рассчитываться не как среднеарифметическое

$$\langle a \rangle = \frac{a_1 + a_2 + \dots + a_N}{N}$$

а как среднегеометрическое:

$$\langle b \rangle = \sqrt[N]{b_1 \cdot b_2 \cdot \dots \cdot b_N}$$

То есть среднеарифметическому значению силы ощущений будет соответствовать среднегеометрическое значение раздражающего фактора:

$$\langle p \rangle = \frac{p_1 + p_2 + \dots + p_N}{N} \Leftrightarrow \langle S \rangle = \sqrt[N]{S_1 \cdot S_2 \cdot \dots \cdot S_N}$$

Немного поясним вышесказанное математически. Сначала вспомним элементарные вещи:

– любая показательная функция может быть сведена к экспоненте:

$$y = a^x$$

$$a^x = (e^{\ln a})^x = e^{\alpha x}, \alpha = \ln a$$

$$y = e^{\alpha x}$$

– натуральный логарифм является обратной функцией для экспоненты, и любая показательная функция в обратную сторону может быть выражена через натуральный логарифм:

$$\ln y = \ln(e^{\alpha x})$$

$$\ln y = \alpha x$$

$$x = \frac{1}{\alpha} \ln y$$

$$x = k \ln y$$

Тогда для формулы (3.46) получим:

$$p = k \ln \frac{S}{S_0} \Rightarrow \frac{S}{S_0} = e^{\frac{1}{k} p} = \left(e^{\frac{1}{k}} \right)^p = a^p, a = e^{\frac{1}{k}}$$

То есть, из формулы, описывающей закон Вебера-Фихнера действительно может быть преобразована в вид «при линейном росте силы ощущений, раздражающий фактор будет изменяться по экспоненциальному закону»:

$$S = S_0 e^{\frac{1}{k} p}$$

Или вообще можем перейти к показательной функции, специфичной для данного раздражающего фактора:

$$S = S_0 a^p, a = e^{\frac{1}{k}}$$

Или же перейти к показательной функции по произвольному основанию:

$$a = 2^{\log_2 a} \Rightarrow S = S_0 \left(2^{\log_2 a} \right)^p = S_0 2^{\beta p}$$

$$\beta = \log_2 a = \log_2 e^{\frac{1}{k}} = \frac{\ln e^{\frac{1}{k}}}{\ln 2} = \frac{1}{k \ln 2}$$

$$S = S_0 2^{\beta p}, \beta = \frac{1}{k \ln 2}$$

Теперь разберёмся с разбиением интервала раздражающего воздействия на диапазоны, исходя из равной ширины этих диапазонов с точки зрения ощущений. То есть будем разбивать на диапазоны раздражающее воздействие в его собственных единицах измерений (скажем, частоты звука, мощность, громкость звука и т.д.) так, чтобы ширина этих диапазонов была равна друг другу с точки зрения наших ощущений. И при этом вспомним, что геометрическая прогрессия, по существу, является дискретизацией показательной функции. То есть, геометрическая прогрессия изменяется так же, как и показательная функция и совпадает по значению с ней в своих узлах (в её точках).

Построим соответствующую геометрическую прогрессию, скажем, со знаменателем $q = 2$:

$$\delta_0 = S_0$$

$$\delta_n = \delta_0 2^{\beta n \Delta p} = \delta_0 \left(2^{\beta \Delta p} \right)^n$$

$$\delta_{i+1} = \delta_i \cdot 2 \Rightarrow \delta_n = \delta_0 2^n \Rightarrow \beta \Delta p = 1$$

$$\Delta p = \frac{1}{\beta} = \frac{1}{\left(\frac{1}{k \ln 2}\right)} = k \ln 2$$

$$\Delta p = \frac{1}{\beta} = k \ln 2 \Rightarrow \delta_n = \delta_0 2^n, \delta_{i+1} = \delta_i \cdot 2$$

И так, если мы разбиваем наш диапазон на равные промежутки, так, что каждая следующая граница в 2-а раза больше по значению (см. октавы и разбиение частотного диапазона звуков по октавам), чем предыдущая, получаем шаг для изменения наших ощущений:

$$\begin{aligned} \delta_{i+1} &= \delta_i \cdot 2 \Rightarrow \\ \Delta p &= k \ln 2 \end{aligned}$$

Если мы разбиваем наш диапазон на равные промежутки, так, что каждая следующая граница в 10 раз больше по значению (смотри звуковое давление, мощность или громкость звука), шаг изменения наших ощущений будет иметь следующий вид:

$$\begin{aligned} \delta_{i+1} &= \delta_i \cdot 10 \Rightarrow \\ \Delta p &= k \ln 10 \end{aligned}$$

Звуковой спектр. Особое значение имеет звуковой спектр – наличие в звуке (в звуковой волне) гармонических колебаний, монохроматических волн тех или иных частот.

Сплошной спектр – это шум. Все осмысленные звуки – речь, музыка и т.д. имеют *дискретный частотный спектр*, состоящий из основной частоты (*тона*) и обертонов, создающих окрас звука – тембр.

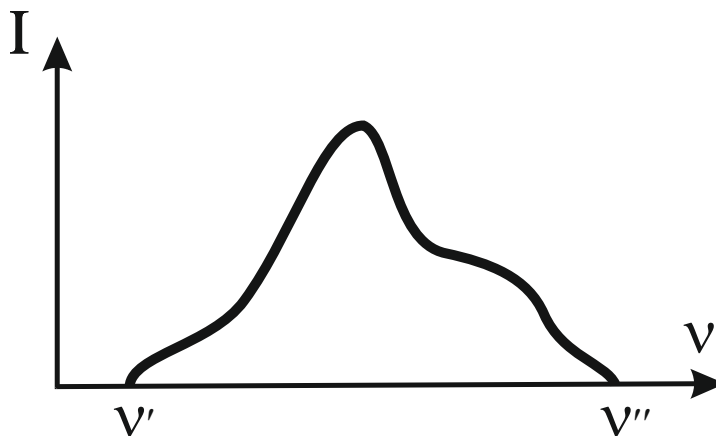


Рисунок 3.7

Сплошной акустический спектр – шум

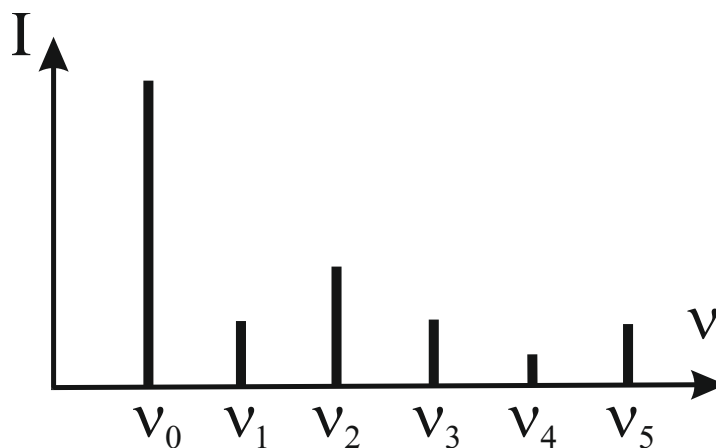


Рисунок 3.8

Линейчатый акустический спектр

v_0 – тон (*тональность звука*),

v_1, v_2, v_3, v_4, v_5 , – обертона.

Тональность (высота) звука

В Таблица 3.2 приводится соответствие частот в звуковой волне и музыкальной тональности звука. Обратите внимание – здесь выполняется закон Вебера-Фехнера.

Таблица 3.2

Соответствие тональности звука частоте звуковой волны

Частота, Гц	Контр-	Большая	Малая	1	2	3	4	5
Нота	октава	октава	октава	октава	октава	октава	октава	октава
До	32.7	65.41	130.82	261.63	523.25	1046.5	2093	4186
До-диез	34.65	69.3	138.59	277.18	554.36	1108.7	2217.4	4434.8
Ре	36.95	73.91	147.83	293.66	587.32	1174.6	2349.2	4698.4
Ре-диез	38.88	77.78	155.56	311.13	622.26	1244.5	2489	4978
Ми	41.21	82.41	164.81	329.63	659.26	1318.5	2637	5274
Фа	43.65	87.31	174.62	349.23	698.46	1396.9	2793.8	
Фа-диез	46.25	92.5	185	369.99	739.98	1480	2960	
Соль	49	98	196	392	784	1568	3136	
Соль-диез	51.9	103.8	207	415.3	830.6	1661.2	3332.4	
Ля	55	110	220	440	880	1720	3440	
Си-бемоль	58.26	116.54	233.08	466.16	932.32	1864.6	3729.2	
Си	61.74	123.48	246.96	493.88	987.75	1975.5	3951	

Ещё раз продемонстрируем логарифмическую шкалу (или геометрическую прогрессию):

- «До» контр-октава – 32.7 Гц,
- «До» большая октава – 65.41 Гц:
 $32.7 \cdot 2 = 65.4 \text{ Гц}$,
- «До» малая октава – 130.82 Гц:
 $65.4 \cdot 2 = 130.8 \text{ Гц}$,
- «До» 1 октава – 261.63 Гц:
 $130.8 \cdot 2 = 261.6 \text{ Гц}$,
 $261.63/32.7 = 8.0009\dots$,
- «До» 2 октава – 523.25 Гц:
 $261.63 \cdot 2 = 523.26 \text{ Гц}$,
- «До» 3 октава – 1046.5 Гц:
 $523.26 \cdot 2 = 1046.5 \text{ Гц}$.

...

Тембр, обертона... Как мы уже сказали, звуковой окрас – тембр характеризуется наличием обертонов.

Громкость звука.

Единицей измерения *мощности* звука (иногда *громкость*, *интенсивность*, *звуковое давление*, хотя есть другие физические величины, имеющие такие же названия) является **Бел** (русское *Б*, международное *В*) в честь американского учёного Александр Белла. Бел – это десятичный логарифм отношения двух величин. Он показывает степень убывания или усиления сигнала. Изначально был придуман Беллом для характеристики

убывания электрического сигнала в телеграфном кабеле, пролегающем по дну океана (от заказа коммерческой компании). Впоследствии данная единица получила гораздо более широкое применение. В данном случае используется натуральный логарифм отношения интенсивности сигнала (*интенсивность звуковой волны*, [Вт/м²]) к пороговой чувствительности человеческого уха (*закон Вебера-Фехнера*).

Для звука:

$$L = \lg \frac{I}{I_0} \quad [Б], \quad (3.47)$$

где

$$I_0 \left[\frac{Вт}{м^2} \right] - \text{порог слышимости (} 2 \cdot 10^{-5} \text{ Па, } 10^{-3} \text{ Вт/м}^2 \text{ на частоте 1 кГц)}$$

⇒ L=0 бел.

Обычно на практике используют не бел используют *децибелы*:

$$1 \text{ дБ} = 0.1 \text{ Б.}$$

Тогда:

$$L = \lg \frac{I}{I_0} = 1 \text{ бел} \Rightarrow \frac{I}{I_0} = 10,$$

$$L = 1 \text{ дБ} \Rightarrow \frac{I_1}{I_2} = 1.259,$$

$$L = 10 \text{ дБ} \Rightarrow \frac{I_1}{I_2} = 10,$$

$$L = 20 \text{ дБ} \Rightarrow \frac{I_1}{I_2} = 100.$$

Если учитывать, что значение мощности (громкости) звука должно быть сразу получено не в *белах*, а в *децибелах*, формулу (3.47) можно переписать в следующем виде:

$$L = 10 \lg \frac{I}{I_0} \quad [\text{дБ}] \quad (3.48)$$

Либо эта же формула может быть выражена через *звуковое давление*:

$$L = \lg \frac{I}{I_0} = \lg \left(\frac{P^2}{\rho v_{\text{ф. звука}}} \cdot \frac{\rho v_{\text{ф. звука}}}{P_0^2} \right) =$$

Мы можем также рассмотреть случай, когда давление у нас определяется, исходя из половинной интенсивности звуковой волны. Это ничего не изменит:

$$= \lg \frac{P^2}{P_0^2} = \lg \left(\frac{P}{P_0} \right)^2 = 2 \lg \frac{P}{P_0}.$$

Тогда выражение (3.47) примет вид:

$$L = 2 \lg \frac{P}{P_0} \quad [Б] \quad (3.49)$$

А выражение (3.48) будет выглядеть, как:

$$L = 20 \lg \frac{P}{P_0} [\text{дБ}] \quad (3.50)$$

Существуют следующие *пороговые значения*:

- Болевой порог – 130–140 дБ.
- Крик – 80 дБ.
- Шепот на расстоянии 1 м – 30 дБ.

В целом же области, воспринимаемые человеческим ухом на диаграмме частот и мощностей выглядят следующим образом (Рисунок 3.9):

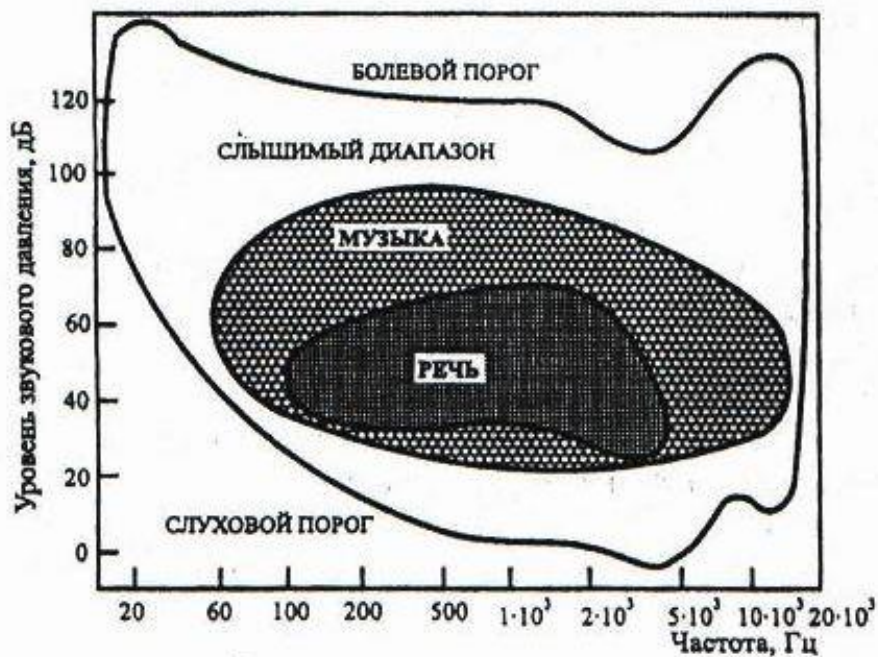


Рисунок 3.9
Области восприятия звука человеком

Говоря же собственно о *громкости звука*, стоит учесть тот факт, что на разных частотах одна и та же мощность звука воспринимается нашим ухом по разному. Существуют так называемые *кривые громкости* – Рисунок 3.10.

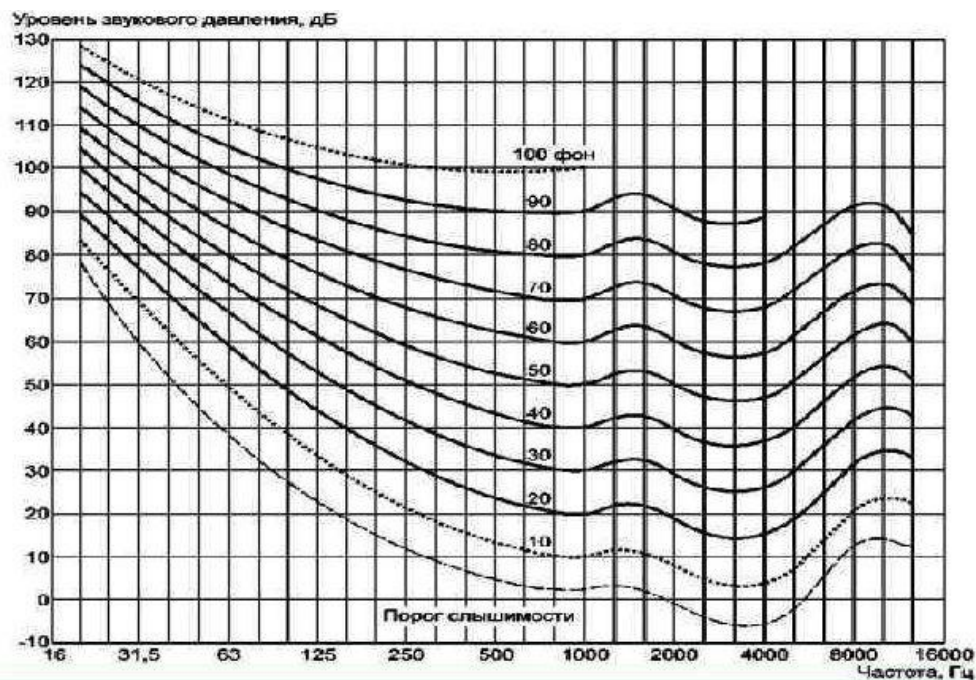


Рисунок 3.10

Кривые громкости – кривые одинаковой слышимости человеком громкости звука на разных частотах

Учитывая этот факт, громкость обычно приводится к значению мощности звука в децибелах на частоте 1 кГц . Соответствующую величину громкости звука называют *фоном* (1 фон – единица измерения громкости).

Сложение мощности звука от разных источников. При сложении звуковых волн, приходящих в одну точку от разных источников, как и следовало ожидать, складываются интенсивности этих звуковых волн.

$$\begin{cases} I = \sum_{i=1}^N I_i \\ I = 10^{\frac{L}{10}} \cdot I_0 \end{cases} \Rightarrow L = 10 \lg \frac{\sum_{i=1}^N I_i}{I_0} = 10 \lg \frac{\sum_{i=1}^N 10^{\frac{L_i}{10}} \cdot I_0}{I_0} = 10 \lg \left(\sum_{i=1}^N 10^{\frac{L_i}{10}} \right)$$

Тогда для сложения мощности (громкости) звука имеем следующую формулу:

$$L = 10 \lg \left(\sum_{i=1}^N 10^{\frac{L_i}{10}} \right) = 10 \lg \left(10^{\frac{L_1}{10}} + 10^{\frac{L_2}{10}} + \dots + 10^{\frac{L_N}{10}} \right)$$

3.5. Другие виды волн

3.5.1. Гравитационные волны

Общая теория относительности Эйнштейна (ОТО) является обобщением и развитием специальной теории относительности (СТО). В рамках этой теории предполагается, что наше пространство, которое уже в СТО рассматривается, как *4-хмерный пространственно-временной континуум*, не всегда является гладким и прямым. В общем случае оно может быть искривлено. В таком пространстве уже невозможно ввести инерциальную систему отсчёта. Представим, что мы нарисованы на листе бумаги и этот лист изогнут. В таком случае на нём просто невозможно начертить прямую, т.к. она должна выходить за пределы этого листа. Вся наша жизнь есть движение по времени и движемся мы по нему постоянно. Но если в каком-то месте «лист бумаги», на котором «мы нарисованы» изогнут (*а изгибают, искривляют его тела за счёт своей гравитационной массы*) то направление нашего движения меняется. Мы имеем в виду лист, где нарисованы ось времени и одна из пространственных осей, скажем x (*вспомните диаграммы Минковского*). Вместо того чтобы лететь по времени с той же скоростью, мы начинаем двигаться «как-то по диагонали». В итоге мы начинаем медленнее двигаться по времени и быстрее по одной из пространственных координат. В этом и состоит суть гравитации.

Математически это записывается, как изменение *метрики пространства* – способа вычисления скалярного произведения в различных точках пространства. Уравнения, которые описывают это, слишком сложны и мы не будем приводить их. Скажем лишь, что из этих уравнений следует, что распространяться возмущение этой метрики (*возмущение гравитационного поля*) в заданном направлении будет в виде волны (*в виде функции от аргумента* $\left(t - \frac{x}{v}\right)$). Распространяться эта волна будет со скоростью света.

При этом гравитационная волна переносит энергию и импульс.

Однако существуют теории, приписывающие гравитационной волне и другие значения скорости, в частности больше, чем скорость света (*в частности и бесконечно большую скорость*).

Также (*из этих же уравнений*) можно показать, что гравитационная волна будет обладать поляризацией. (*Это делается через введение некоего оператора поворота*). Отсюда следует, что гравитационные волны – это поперечные волны, так как только для поперечных волн возможна поляризация.

Распространение гравитационных волн отнюдь не связано с изменением значения Ньютоновского гравитационного потенциала. В теории тяготения Ньютона, которая остаётся вполне применимой в случае слабых гравитационных полей (скажем, поле тяготения Земли), притяжение между телами описывается следующим законом:

$$\bar{F}_{\text{Всемирного тяготения}} = -G \frac{m_1 m_2}{r^2} \cdot \bar{e}_r, \quad (3.51)$$

где

- G – гравитационная постоянная,
- m_1, m_2 – тяготеющие массы,
- r – расстояние между центрами масс тяготеющих объектов.

Ни гравитационная постоянная G , ни, тем более, массы тел m_1 и m_2 при прохождении гравитационной волны изменяться не будут. Таким образом, сила гравитационного притяжения между всеми телами, и, в частности, притяжение тел к Земле, останется без изменения. Без изменения останется и потенциал гравитационного поля земли:

$$\varphi = \frac{W_{\text{П}}}{q} = \frac{\cancel{m} gh}{\cancel{m}} = gh,$$

где

$$g = G \frac{M_{\text{Земли}}}{R_{\text{Земли}}^2}$$

– ускорение свободного падения.

Однако изменяться сами расстояния между телами, а для свободной (ни с кем не взаимодействующей, свободно «висящей» в пространстве) частицы приведёт к возникновению на первый взгляд беспричинного ускорения в системе координат, в которой она до этого покоилась – просто пространство «уйдёт у неё из-под ног»!

Но нас будет интересовать *первый факт* – именно изменение самих расстояний. В этом случае в настроенном на ту или иную длину волны резонаторе или интерферометре изменится результирующая картина усиления или ослабления взаимодействующих световых волн. Конечно, скорее всего, ускорение свободного падения, всё же будет до некоторой степени меняться в области прохождения гравитационной волны. Это может быть связано с изменением расстояния между тяготеющими объектами – радиуса Земли $R_{\text{Земли}}$ в формуле (3.51). Но эти изменения будут совсем незначительными, сильно меньше того значения, которое реально может быть определено современными методами. Более осязаемым (*более пригодным для детектирования гравитационных волн*) является именно сокращение длины некоторого резонатора при прохождении гравитационной волны.

Наблюдение гравитационных волн. Впервые гравитационные волны были детектированы 14 сентября 2015 года на 2-х детекторах *LIGO*, конструкцию которых мы разберём чуть позже. Расстояние между детекторами – 302 км. Это расстояние проходит свет за 10 мс. Если считать (как принято в большинстве теорий), что гравитационная волна движется со скоростью света c , данное расстояние позволит определить направление на объект. Хотя точно рассчитать по методу триангуляции сектор на небе пока не возможно – для этого нужно как минимум 3-и детектора. Это событие официально считается *открытием гравитационных волн*, впервые предсказанных Эйнштейном в 1916 году.

Справедливости ради надо сказать, что чуть ранее наблюдалась ещё одно спорное событие (август 2015г.). Но из-за спорности этого события, его принято не принимать в расчёт.

Затем было зафиксировано ещё 2-а наблюдения на 2-х детекторах *LIGO*, на достаточно большом расстоянии без параллельного наблюдения традиционными астрономическими методами.

В 2017г. был присоединён детектор *Virgo*. С появлением 3-его детектора стала возможной триангуляция – расчёт сектора небесной сферы, направления на объект. И 17 августа 2017 года впервые удалось провести детектирование события на очень близком расстоянии до Земли (*ещё не наша Галактика, но достаточно близкая к нам*). При этом удалось методом триангуляции (*по запаздыванию прихода сигнала на 3-и детектора*) определить сектор на небе, откуда пришёл сигнал. Это позволили сопоставить это событие с наблюдением вспышки γ -излучения, произошедшей в том же секторе через 1.7 секунд.

Мощные гравитационные волны рождаются во Вселенной при таких глобальных событиях, как слияние двойных звёздных систем, состоящих из нейтронных звёзд или чёрных дыр. Вкратце опишем процесс и его участников. Двойные звёздные системы состоят из 2-х звёзд, которые вращаются вокруг центра масс этой системы. Вращение не даёт этим звёздам упасть друг на друга – проще говоря, *сливаться*. Однако в процессе вращения система будет излучать энергию в виде тех же гравитационных волн (для обычных звёзд ещё и электромагнитных волн широкого спектрального диапазона, для нейтронных звёзд – в γ -диапазоне). При этом такие системы могут состоять из нейтронных звёзд или чёрных дыр. И то и другое – это очень массивные объекты очень малого размера, возникающие на последнем этапе жизни звезд, когда реакция термоядерного синтеза прекращается, звёзды начинают остывать и сжиматься под действием собственной гравитации.

Нейтронная звезда – звезда, которая сжимается до плотности нейтрона. Потом силы внутреннего отталкивания уравнивают гравитационное притяжение. такие звёзды не излучают света – электромагнитных волн видимого, ИК или УФ диапазона. Обычно они светятся в рентгеновском и γ -диапазоне.

Чёрная дыра сжимается практически до бесконечности. С некоторого момента сила её гравитации становится столь велика, что даже свет не может

оторваться от неё. Тем не менее, такой объект может излучать гравитационные волны – вызывать колебания метрики пространства.

В момент слияния таких двойных систем, когда резко изменяется момент инерции и момент импульса системы происходит излучение очень мощной гравитационной волны, причём переменной частоты (частота, как и в случае электромагнитной волны, излучающееся вращающимися заряженными шариками, будет соответствовать частоте вращения системы). Для нейтронных звёзд этот процесс будет ещё сопровождаться и мощным выбросом энергии в виде электромагнитных волн в γ -диапазоне.

И так, 2-а основных события по наблюдению гравитационных волн:

14.09.2015 09:50:45 UTC (*открытие*) – слияние 2-х чёрных дыр, 2 детектора (2-а LIGO). Определение направления на объект не возможно, расстояние – методом сравнение массы источника и убывания амплитуды сигнала. Расстояние до источника – 1,3 млрд световых лет (размеры нашей галактики – диаметр диска >100 тыс. световых лет, толщина – ~ 1000 световых лет), это в 10^4 раз больше, чем диска нашей галактики.

17.08.2017 12:41:04 UTC – слияние системы 2-х нейтронных звёзд, 3 детектора (2-а LIGO и 1-н Virgo). Направление на объект (сектор на небесной сфере) было определено методом триангуляции (по запаздыванию прихода сигнала к 3-м датчика, аналогично работе GPS). Сектор на небе – $2^\circ \times 15^\circ$. Это сектор, закрываемый на небе бананом на расстоянии вытянутой руки. Также наблюдалось астрономически (*впервые*) – через 1.7 с γ -вспышка в той же области (γ -вспышка характерна только для слияния нейтронных звёзд, при слиянии чёрных дыр из данной области ничего, кроме гравитационных волн не излучается). Источник наблюдался в созвездии Гидры с центром в районе звезды Пси Гидры (видимой невооруженным взглядом). Расстояние до источника около 130 миллионов световых лет, что согласуется с расстоянием до галактики NGC 4993. После данного наблюдения все сомнения в том, что наблюдения были действительно наблюдениями гравитационных волн, а не мышь пробежавшей поблизости, отпали.

Ниже мы для примера приведём примерный вид результатов наблюдения на детекторе LIGO и результатов их первичной обработки (Рисунок 3.11). На Рисунок 3.13 приведены фото детекторов LIGO и Virgo, а на их расположение на Земле, чтобы понять – при наличии такого расстояния между детекторами вполне реально рассчитывать на достаточно точное определение направления на объект методом триангуляции.

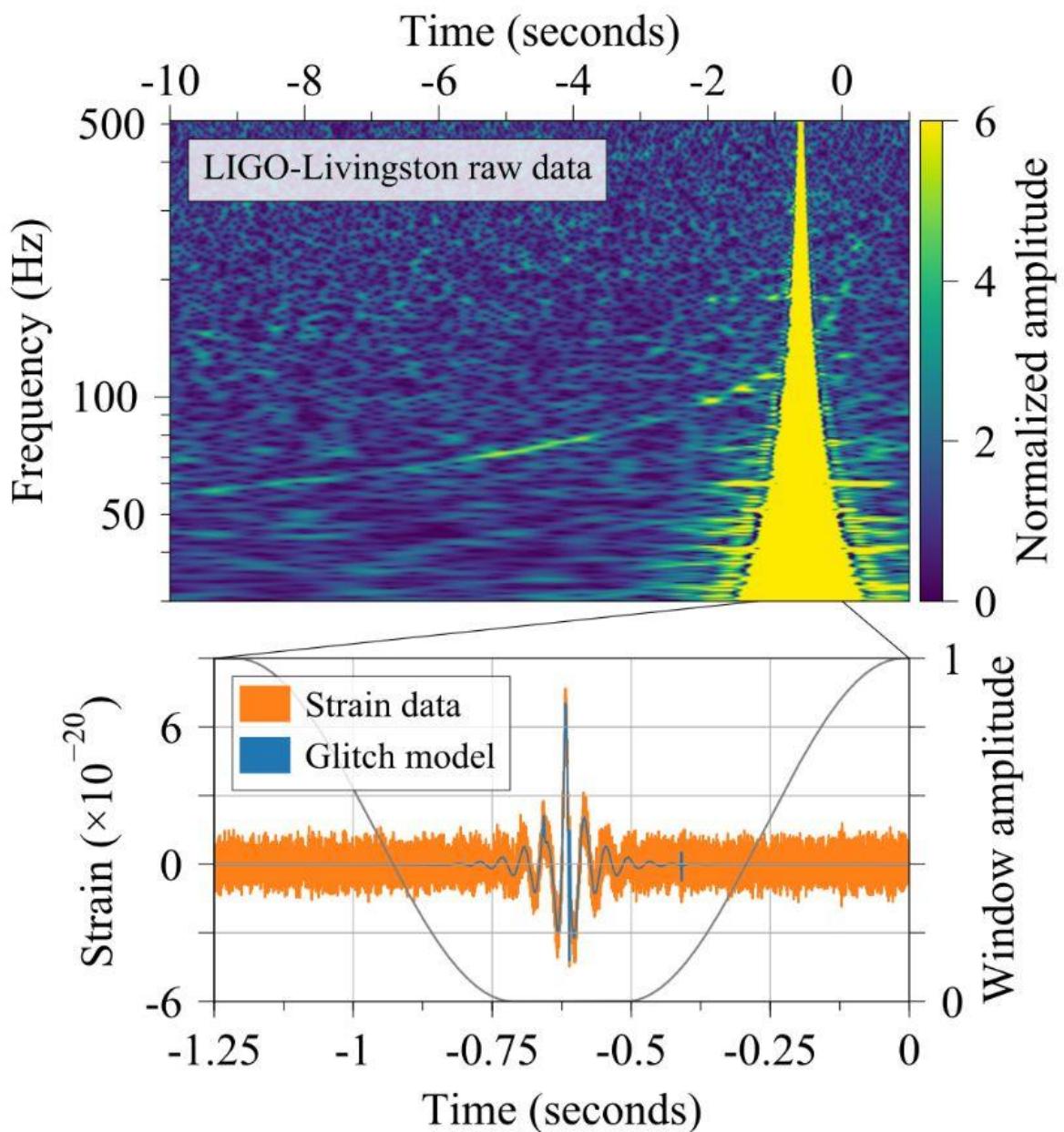


Рисунок 3.11

Сигнал при детектировании гравитационных волн на детекторе LIGO.

(Первоисточник: [GW170817: Observation of Gravitational Waves from a Binary Neutron Star Inspiral](#))

Детектор LIGO. Детектор представляет собой интерферометр Майкельсона, помещённый в систему, в которой поддерживается глубокий вакуум. В плечах интерферометра смонтированы два резонатора (интерферометра) Фабри-Перо. Зеркала этих резонаторов, сделанные из кварцевого стекла, являются пробными массами, участвующими во взаимодействии с гравитационной волной. База этих резонаторов (L_x и L_y) очень велика и составляет 4км. Интерферометр Майкельсона исходно создавался автором для измерения расстояний (длин) и сравнения расстояний (длин) в обоих плечах. Изменение расстояния в одном из плеч в результате прохождения гравитационной волны приведёт к смещению интерференционной картины. Благодаря многократному прохождению луча в резонаторах Фабри-Перо (база измеряемого, сравниваемого расстояния проходится лучами около 280 раз), картина дополнительно усиливается.

Использование 2-х усилительных зеркал, одно из которых не позволяет излучению вернуться из интерферометра к излучателю, а другое – от детектора в интерферометр, даёт возможность снизить мощность применяемого лазера с 750 до 200 Вт.

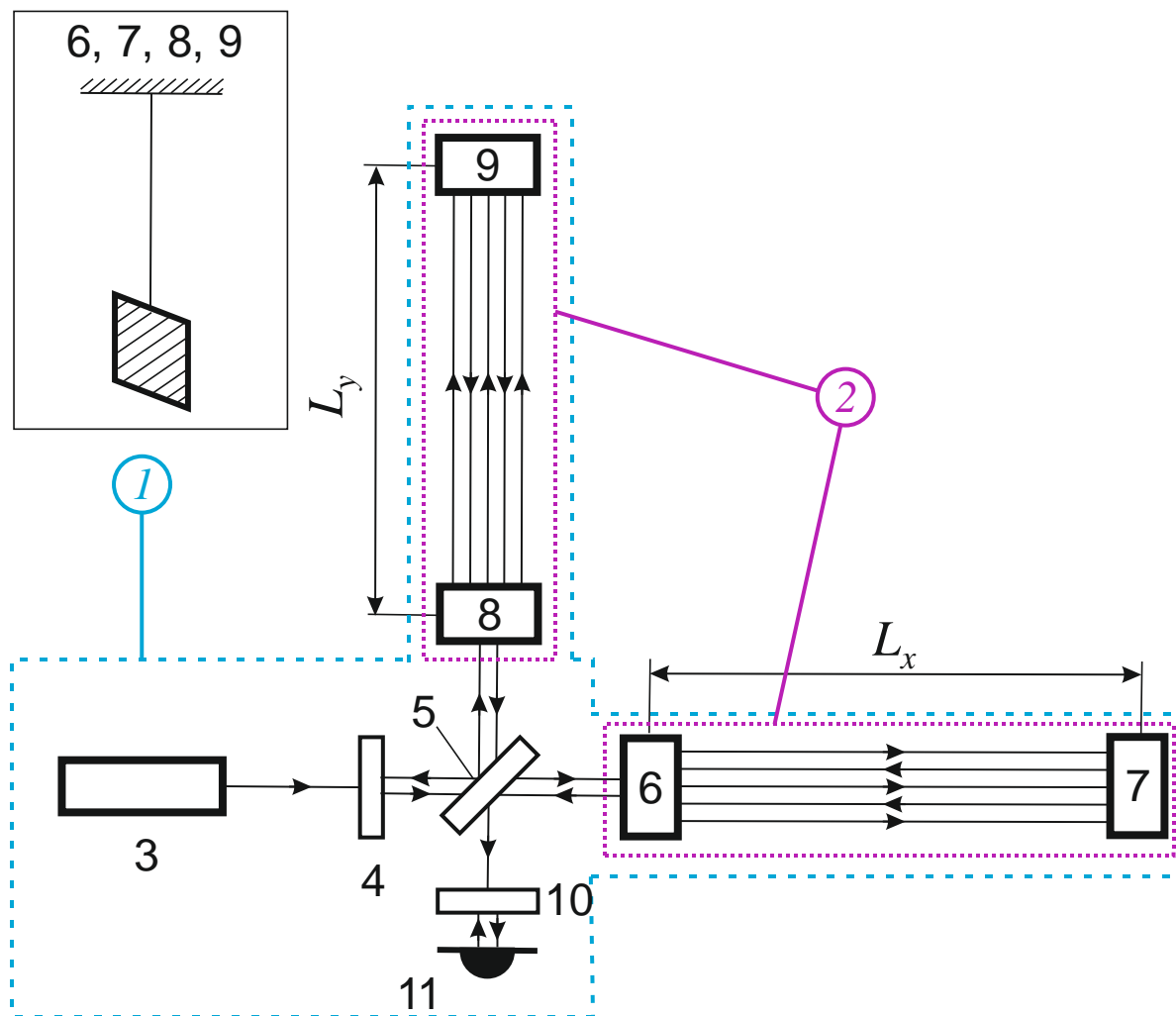


Рисунок 3.12

Схема детектора LIGO:

- 1 – система, где создаётся глубокий вакуум;
- 2 – интерферометр (резонатор) Фабри-Перо;
- 3 – лазер (источник излучения);
- 4 – усилитель луча, зеркало, пропускающее излучение от лазера и возвращающее назад (отражающее) лучи из интерферометра;
- 5 – делитель излучения интерферометра Майкельсона (полупрозрачная стеклянная пластина);
- 6, 7, 8, 9 – экспериментальные (пробные) массы, зеркала (7, 9) и полупрозрачные зеркала (6, 8) на тонком подвесе непосредственно участвующие во взаимодействии с гравитационной волной;
- 10 – усилитель выходного сигнала, зеркало, пропускающее лучи из интерферометра и возвращающее лучи, отражённые от детектора назад к детектору;
- 11 – фотодетектор.



а



б

Рисунок 3.13

Детектор LIGO (а) и Virgo (б) (большие трубы – плечи интерферометра)

Первоисточник: <https://www.dailytechinfo.org/space/9613-detektory-ligo-i-virgo-raspolzhennye-na-raznyh-storonah-zemnogo-shara-zaregistrovali-chetvertyy-paket-gravitacionnyh-voln.html>



Рисунок 3.14
Детекторы LIGO и Virgo на карте Мира
(исторически первые – LIGO Hanford и LIGO Livingston).
Первоисточник: <https://za-neptunie.livejournal.com/287872.html>

Отдельно приведём схемы интерферометров Майкельсона и Фабри-Перо:

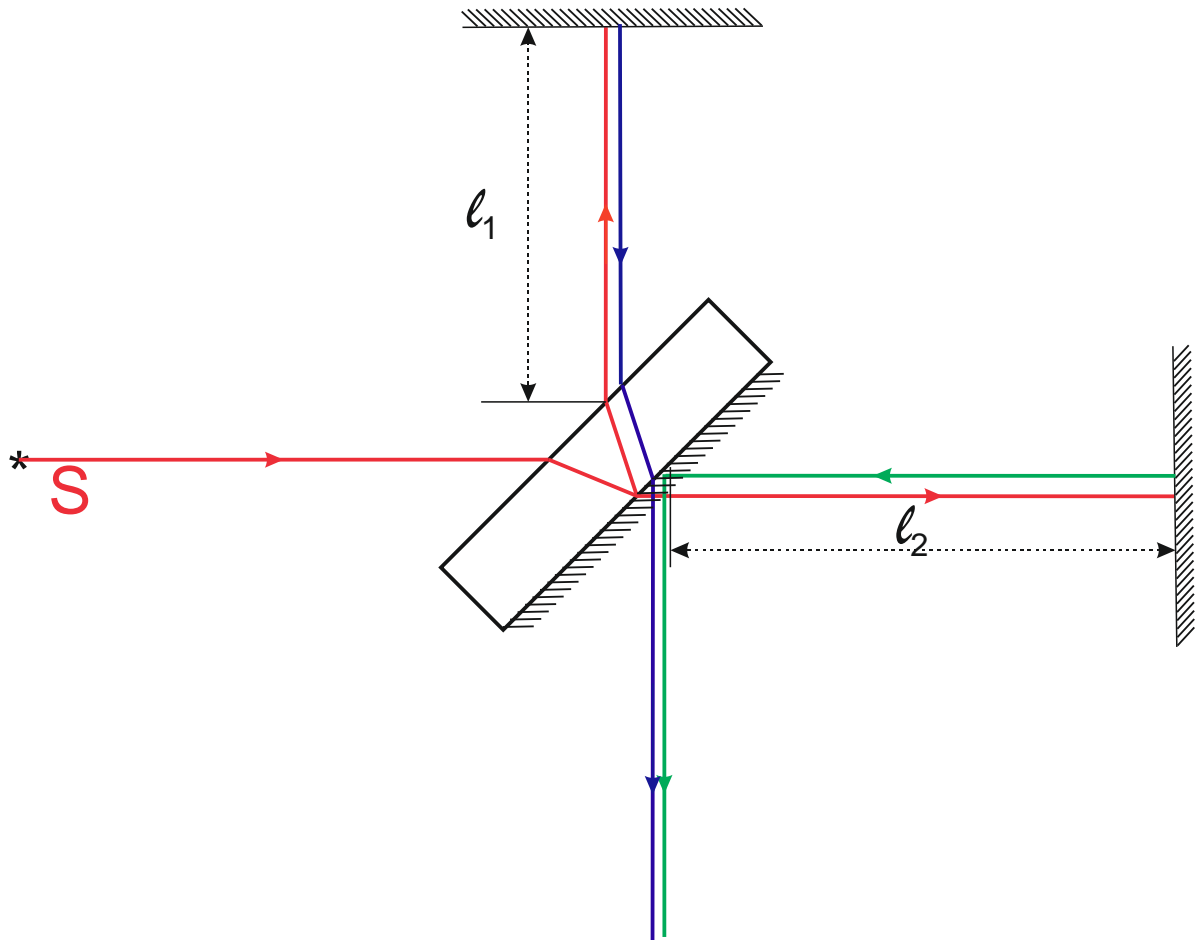
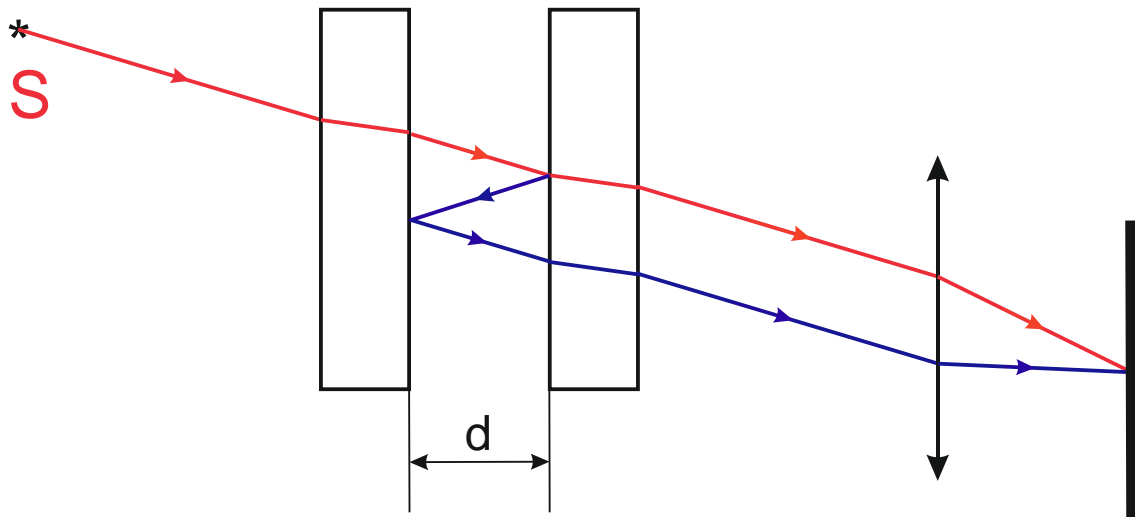
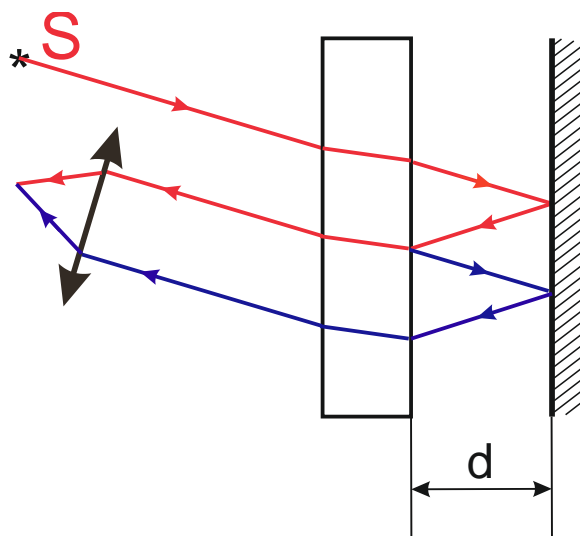


Рисунок 3.15
Интерферометр Майкельсона



а



б

Рисунок 3.16

Интерферометр (*резонатор*) Фабри-Перо:

(а) – в проходящем свете,

(б) – отражённом свете

В схеме детектора LIGO и Virgj использован интерферометр Фабри-Перо в отражённом свете – вариант (б). Причём резонатор проходится лучом не 2-а, а примерно 280 раз.

Квантовая теория гравитационных волн на сегодняшний день не построена. Если же квантование гравитационных волн всё же существует, квант гравитационной волны называется *гравитон*. Считается, что в этом случае при поглощении веществом одного гравитона, в среде должен родиться квант звука фонон (*квазичастица, порция энергии, ведущая себя в процессе распространения звуковой волны, как частица, но реально не ассоциируемая ни с какой энергией, являющаяся энергией, переносимой звуковой волной*). На этом основан ещё один способ детектирования гравитационных волн. Если в шихте на большой глубине в образце твёрдого

кристаллического вещества без видимых причин рождается фонон, значит имел место акт поглощения кванта гравитационного поля – гравитона.

3.5.2. Волны де Бройля

С точки зрения квантовой механики с движением частицы можно связать некий волновой процесс. При этом при движении потока частиц они будут вести себя, как волны и испытывать дифракцию и интерференцию. При взаимодействии частицы будут вести себя как частицы – мы можем указать конкретное место и время взаимодействия двух частиц. Результатом же дифракции и интерференции волн в этом случае будет вероятность обнаружения частицы в той или иной области пространства (больше амплитуда волны – больше вероятность обнаружения).

Эти волны были теоретически предсказаны де Бройлем (1924 г.) и экспериментально открыты несколько позже (Дэвиссон и Джермер, 1927 г.) по наблюдению дифракции потока электронов при отражении от поверхности отшлифованного кристалла никеля: углы, под которыми наблюдался максимум интенсивности отражённого сигнала, соответствовали углу дифракции волны с длиной волны, рассчитанной по формуле, предложенной де Бройлем.

Волны де Бройля являются поперечными волнами, поскольку для им присуще свойство поляризации. Поляризация одной волны связанной с одной отдельно взятой частицей связана со спином частицы. Положительный или отрицательный спин частицы (*свойство наличия у частицы собственного момента импульса и магнитного момента в макром мире обычно связываемого с вращением вокруг своей оси*) определяет поляризацию волны по правому или левому кругу. Так поляризованный по кругу луч света (*лазерный луч*) будет выбивать из вещества поляризованный поток электронов (*следствие фотоэффекта*).

Одним из свойств волны де Бройля является наличие дисперсии даже при распространении в вакууме. Для сравнения, электромагнитная волна, свет не испытывает дисперсии в вакууме – фазовая скорость независимо от частоты равна скорости света в вакууме c . При распространении же в среде для электромагнитных волн, света наблюдается дисперсия – зависимость фазовой скорости от частоты. Это вызывает преломления луча на границе раздела сред с разной дисперсией и «расплывание» волновых пакетов при движении в среде. Для гравитационных волн в вакууме также предполагается отсутствие дисперсии – их скорость равна скорости света. Что касается распространения этих волн в среде – похоже, этим вопросом пока никто не занимался. Механические волны просто не могут распространяться в вакууме – *для них там нечему колебаться!* По этому и о дисперсии этих волн в вакууме говорить бессмысленно.

Так вот, волны де Бройля испытывают дисперсию при распространении в вакууме. Это следует из самого уравнения волны, точнее длины волны де Бройля:

$$\lambda = \frac{2\pi\hbar}{p}$$

либо

$$\lambda = \frac{h}{p},$$

здесь

\hbar, h постоянная Планка ($6.626 \cdot 10^{-34}, 1.054 \cdot 10^{-34}$ Дж·с),

$p = mv$ импульс частицы.

Как мы видим, длина волны здесь зависит от скорости, а, следовательно, скорость будет функцией длины волны. Более точно, надо вычислить фазовую и групповую скорость волны де Бройля и сравнить их. Этот вопрос будет подробно рассмотрен подробно в разделе «Квантовая механика I» – «Волна де Бройля». Единственное, что можно сказать, не вдаваясь в подробности, групповая скорость волны де Бройля в итоге будет равна скорости движения частицы. Это и следовало ожидать – групповая скорость есть распространения возмущения, и, если возмущение связано с движением частицы, эта скорость и скорость движения частицы должны совпадать. А вот фазовая скорость будет определяться соотношением:

$$v_{\text{фаз.}} = \frac{\omega}{k} = \frac{c^2}{v},$$

и кардинально отличаться от групповой. Как следствие – наблюдение дисперсии для волны де Бройля и «расплывание» волновых пакетов.

Как мы указывали выше, в случае отсутствия дисперсии групповая и фазовая скорости будут равны, а в случае наличия – нет. Здесь эти величины различны и дисперсия будет наблюдаться (*всегда!*). Групповая скорость, как и ожидается, будет равна скорости движения частицы. А вот фазовая скорость будет от неё отличаться. Следствием этого будет тот факт, что волновые пакеты, созданные из волн де Бройля, будут неустойчивы (*будут расползаться*). Причём этот процесс будет наблюдаться всегда, даже при движении частиц (и распространении волны де Бройля) в вакууме.

Более подробно всё, что касается волн де Бройля будет разбираться нами в рамках физики микромира (*в рамках квантовой механики*).

4. Эффект Доплера²

Эффект Доплера заключается в изменении частоты наблюдаемых колебаний, распространяющихся с некоторой волной, в случае, если источник и/или приёмник данной волны движутся относительно друг друга и относительно среды распространения волны. Поясним на простейшем примере. Так если корабль, раскачиваясь на волнах, имеет одну частоту колебаний, то в случае, если он начнёт двигаться на встречу волнам, качка усилится (*частота колебаний станет больше*). В случае же, если он начнёт плыть в сторону распространения волн, качка уменьшится или вообще прекратится, если он будет двигаться со скоростью самих волн.

4.1. Эффект Доплера для звуковых волн

Эффект Доплера можно наблюдать для звука, если источник звука приближается к нам или удаляется от нас. Либо если мы сами приближаемся или удаляемся от источника звука. Частота (*тональность*) звука в случае приближения, покоя или удаления будет различной. примером тому может быть машина с сиреной. При приближении к нам и удалении от нас тональность звука (*его частота*) будут различны (*и при этом будут отличаться от истинной*). Эффект Доплера для ультразвука используется в технике. На его основе работают медицинские приборы – доплерографы. По смещению частоты исходного ультразвукового сигнала, отражённого от тканей человеческого организма удаётся определить скорость потока крови в сосудах человека. Отражённый от молекул крови ультразвуковой сигнал будет иметь доплеровское смещение в зависимости от скорости движения молекул крови. В отражённом сигнале будет присутствовать как основная, исходная частота, так и две смещённые частоты. Для сигнала, отражённого от потока крови, движущегося к излучателю, частота будет больше. Для сигнала, отражённого от потока крови, движущегося от него, частота будет меньше.

Если волна распространяется в среде с некоторой скоростью распространения (скажем, *звук распространяется в воздухе со скоростью звука*, это значит, что распространяться он будет с *этой скоростью относительно системы отсчёта, связанной с самим воздухом*). Тогда, если источник волны движется относительно среды распространения с некоторой скоростью, волна будет распространяться «вперёд» медленнее на скорость самого источника волны, а «назад», быстрее на эту же скорость. Действительно, ведь, независимо от того, что источник волны движется вперёд, скорость распространения останется той же самой относительно среды, в которой волна распространяется.

² Данный раздел отсутствует у большинства лекторов при изложении ими курса физики. Однако, материал этого раздела необходим для понимания ряда вопросов в дальнейшем (в частности, раздел «Ширина спектральной линии» в квантовой механике). В моём курсе этот вопрос включён в билеты экзамена.

Для движущегося относительно среды источника скорость распространяющейся вперёд волны (*относительно системы отсчёта, связанной с источником*) будет равна:

$$v_{\text{распространения}} = v_{\text{в среде}} - v_{\text{источника}} \Rightarrow$$

$$\lambda = \frac{v}{\nu} \Rightarrow \lambda = \frac{v - v_{\text{ист.}}}{\nu}$$

Это связано с тем, что волна распространяется относительно среды, а источник «догоняет её». К примеру, если источник движется со скоростью волны, то волна попросту не будет «успевать от него убежать». В этом случае скорость волны будет 0 и она попросту не будет распространяться.

Используя соотношение между длиной волны, частотой колебаний и скоростью, мы получили новое выражение для длины волны (*ведь колебания в источнике волны будут всё равно происходить с той же самой частотой*). Поскольку источник «догоняет волну», длина волны – расстояние между точками, колеблющимися в одной фазе – становится меньше.

В случае же, если приёмник волны движется относительно волны, то в случае его приближения к источнику для него скорость волны будет складываться из скорости волны относительно среды, в которой она распространяется и скорости движения приёмника (*приёмник будет «набегать» на волну*). В случае, если приёмник удаётся от источника, его скорость будет вычитаться из скорости волны.

Для движущегося относительно среды приёмника, в случае его приближения к источнику волны имеем:

$$v_{\text{распространения}} = v_{\text{в среде}} + v_{\text{приёмника}} \Rightarrow$$

$$v = \frac{v}{\lambda} \Rightarrow v = \frac{v + v_{\text{пр.}}}{\lambda}$$

Данный факт можно пояснить так: если Вы стоите в воде в зоне прибоя то волны будут накатываться на Вас с одной частотой. Но если Вы побежите на встречу волнам, то будите встречаться с ними гораздо чаще, потому что сами набегаеете на движущиеся на Вас волны.

В итоге, учтя оба фактора, получим выражение для эффекта Доплера:

$$v = \frac{v + v_{\text{пр.}}}{\lambda} = \frac{v + v_{\text{пр.}}}{\left(\frac{v - v_{\text{ист.}}}{v_0} \right)} = v_0 \frac{v + v_{\text{пр.}}}{v - v_{\text{ист.}}} =$$

$$= v_0 \frac{1 + \frac{v_{np.}}{c}}{1 - \frac{v_{ист.}}{c}}$$

Или окончательно:

$$v = v_0 \frac{1 + \frac{v_{np.}}{c}}{1 - \frac{v_{ист.}}{c}} \quad (4.1)$$

Последнее выражение, формула (4.1) – есть выражение доплеровского смещения для звуковой волны.

4.2. Эффект Доплера для электромагнитной волны

Для электромагнитных волн (для света, в частности) эффект Доплера будет иметь некоторые особенности. В этом случае не играет отдельной роли скорость движения источника и приёмника «относительно среды», так как электромагнитная волна распространяется во всех системах отсчёта с одной и той же скоростью c . Роль играет лишь скорость сближения или разбегания источника волны и её приёмника.

Для вывода уравнения эффекта Доплера для электромагнитной волны воспользуемся уравнением этой волны (причём приведём его к виду выражения для гармонических колебаний с учётом запаздывания времени, здесь мы учли, что $k = \frac{\omega}{v_{ф.}} = \frac{\omega}{c}$). Стойки зрения подвижной и неподвижной систем отсчёта уравнение будет иметь вид:

– относительно неподвижной системы отсчёта (без учёта эффекта Доплера):

$$E = E_0 \cos(\omega t - kx + \varphi_0) = E_0 \cos\left(\omega\left(t - \frac{x}{c}\right) + \varphi_0\right)$$

– относительно неподвижной системы отсчёта (частота ω' отличается от исходной частоты волны ω за счёт эффекта Доплера, пространственная и временная координаты x и t – исходные, для неподвижной системы отсчёта, не преобразованные преобразованием Лоренца):

$$E = E_0 \cos(\omega' t - kx + \varphi_0) = E_0 \cos\left(\omega'\left(t - \frac{x}{c}\right) + \varphi_0\right),$$

– относительно подвижной системы отсчёта (частота ω – исходная частота излучателя, координаты – координаты подвижной системы отсчёта, которые могут быть преобразованы к неподвижным с помощью преобразования Лоренца)

$$E = E_0 \cos(\omega t' - k'x' + \varphi_0) = E_0 \cos\left(\omega\left(t' - \frac{x'}{c}\right) + \varphi_0\right).$$

Как сказано выше, координата и время в этих двух системах отсчёта связаны преобразованием Лоренца:

$$x = \frac{x' + v_x t'}{\sqrt{1 - \frac{v_x^2}{c^2}}},$$

$$t = \frac{t' + l \frac{v}{c^2}}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}, l = x'$$

Подставим выражение для преобразования Лоренца в уравнение электромагнитной волны. Произведя небольшие преобразования и приведя фазу волны к привычному (*исходному*) виду, получим выражение для циклической частоты в подвижной системе отсчёта:

$$E = E_0 \cos\left(\omega' \left(\frac{t' + l \frac{v}{c^2}}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} - \frac{\frac{x' + vt'}{c}}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} \right) + \varphi_0\right),$$

$$E = E_0 \cos\left(\omega' \left(\frac{t' + \frac{v}{c^2} x'}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} - \frac{x' + vt'}{c \sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} \right) + \varphi_0\right),$$

$$E = E_0 \cos\left(\omega' \frac{1}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} \left(t' + \frac{v}{c^2} x' - \frac{x' + vt'}{c} \right) + \varphi_0\right),$$

$$E = E_0 \cos\left(\omega' \frac{1}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} \left(\frac{(c-v)t' + \left(\frac{v}{c} - 1\right)x'}{c} \right) + \varphi_0\right),$$

$$E = E_0 \cos \left(\omega' \frac{1}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} \left(\frac{(c-v)t' - \left(1 - \frac{v}{c}\right)x'}{c} \right) + \varphi_0 \right),$$

$$E = E_0 \cos \left(\omega' \frac{1 - \frac{v}{c}}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} \left(\frac{\frac{c-v}{1 - \frac{v}{c}} t' - x'}{c} \right) + \varphi_0 \right),$$

$$E = E_0 \cos \left(\omega' \frac{1 - \frac{v}{c}}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} \left(\frac{c-v}{c - \frac{v}{c}} t' - \frac{x'}{c} \right) + \varphi_0 \right),$$

$$E = E_0 \cos \left(\omega' \frac{1 - \frac{v}{c}}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} \left(\frac{c-v}{c-v} t' - \frac{x'}{c} \right) + \varphi_0 \right).$$

И так, уравнение электромагнитной волны с выражением циклической частоты для подвижной системе отсчёта будет иметь вид:

$$E = E_0 \cos \left(\omega' \frac{1 - \frac{v}{c}}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} \left(t' - \frac{x'}{c} \right) + \varphi_0 \right),$$

а сама связи частот в той и другой системах отсчёта:

$$\omega = \omega' \frac{1 - \frac{v}{c}}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}.$$

Произведя небольшое преобразование:

$$\omega = \omega' \frac{1 - \frac{v}{c}}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} = \omega' \frac{\sqrt{\left(1 - \frac{v}{c}\right) \left(1 - \frac{v}{c}\right)}}{\sqrt{\left(1 + \frac{v}{c}\right) \left(1 - \frac{v}{c}\right)}} = \omega' \frac{\sqrt{\left(1 - \frac{v}{c}\right)}}{\sqrt{\left(1 + \frac{v}{c}\right)}},$$

получим выражение для эффекта Доплера для электромагнитной волны или света:

$$\omega = \omega_0 \sqrt{\frac{1 - v/c}{1 + v/c}}, \quad (4.2)$$

$$v = v_0 \sqrt{\frac{1 - v/c}{1 + v/c}}. \quad (4.3)$$

На основе эффекта Доплера для света рассчитывается скорость движения космических объектов (*звёзд, галактик...*) относительно Солнца и Земли. Зная частоту линий излучения тех или иных элементов в спектре и найдя эти же линии в спектре излучения космического объекта, по смещению частоты можно понять с какой скоростью этот объект приближается или удаляется от нас. На основе данного эффекта так же работают полицейские радары для определения скорости движения автомобиля и контроля за превышением скоростного режима.

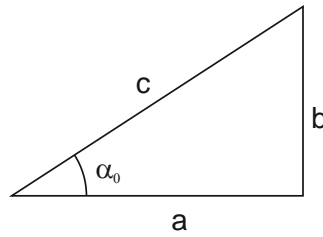
Надо отметить, что для электромагнитной волны помимо *продольного эффекта Доплера*, будет иметь место и *поперечный эффект Доплера*, когда излучатель движется в направлении, перпендикулярном к направлению движения на приёмник (*движется перпендикулярно к прямой, соединяющий приёмник и источник*). В этом случае будем иметь следующее соотношение для частот:

$$\omega = \omega_0 \sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}} \approx \omega_0 \left(1 - \frac{1}{2} \frac{v^2}{c^2} \right). \quad (4.4)$$

Приложение

Решение дифференциальных уравнений для колебательных процессов

Полезные тригонометрические формулы – преобразование суммы и разности косинуса и синуса угла к косинусу со сдвигом фазы.



Рассматриваемый треугольник

Рассмотрим следующие выражения:

$$\begin{aligned} a \cos \alpha + b \sin \alpha, \\ a \cos \alpha - b \sin \alpha. \end{aligned}$$

И представим их, как косинус с некоторым множителем (амплитудой) и сдвигом фазы. Для этого рассмотрим прямоугольный треугольник со сторонами a, b, c и углом при основании α_0 :

$$\begin{aligned} c^2 &= a^2 + b^2, \\ a &= c \cos \alpha_0, \\ b &= c \sin \alpha_0. \end{aligned}$$

Выразим в наших уравнениях a, b через c :

$$\begin{aligned} a \cos \alpha + b \sin \alpha &= c \cos \alpha_0 \cos \alpha + c \sin \alpha_0 \sin \alpha = \\ &= c (\cos \alpha_0 \cos \alpha + \sin \alpha_0 \sin \alpha), \\ a \cos \alpha - b \sin \alpha &= c \cos \alpha_0 \cos \alpha - c \sin \alpha_0 \sin \alpha = \\ &= c (\cos \alpha_0 \cos \alpha - \sin \alpha_0 \sin \alpha). \end{aligned}$$

А теперь вспомним формулы для косинуса суммы и разности углов:

$$\begin{aligned} \cos(\alpha - \beta) &= \cos \alpha \cdot \cos \beta + \sin \alpha \cdot \sin \beta, \\ \cos(\alpha + \beta) &= \cos \alpha \cdot \cos \beta - \sin \alpha \cdot \sin \beta. \end{aligned}$$

Подставляя в имеющиеся выражения, имеем:

$$\begin{aligned} a \cos \alpha - b \sin \alpha &= c \left(\underbrace{\cos \alpha_0 \cos \alpha - \sin \alpha_0 \sin \alpha}_{\cos(\alpha + \beta)} \right) = c \cos(\alpha + \alpha_0) = \\ &= \sqrt{a^2 + b^2} \cos \left(\alpha + \operatorname{arctg} \frac{b}{a} \right), \end{aligned}$$

и

$$a \cos \alpha + b \sin \alpha = c \left(\underbrace{\cos \alpha_0 \cos \alpha + \sin \alpha_0 \sin \alpha}_{\cos(\alpha - \beta)} \right) = c \cos(\alpha - \alpha_0) = \\ = \sqrt{a^2 + b^2} \cos \left(\alpha - \operatorname{arctg} \frac{b}{a} \right).$$

Теорема Эйлера. Она нам тоже понадобится.

$$e^{i\varphi} = \cos \varphi + i \sin \varphi$$

Тогда для отрицательного аргумента (учитывая чётность косинуса и нечётность синуса):

$$e^{-i\varphi} = e^{i(-\varphi)} = \cos(-\varphi) + i \sin(-\varphi) = \cos \varphi - i \sin \varphi$$

Общее решение однородного линейного дифференциального уравнения второго порядка:

$$\frac{d^2 y}{dx^2} + a_1 \frac{dy}{dx} + a_0 y = 0.$$

Поначалу будем рассматривать это уравнение в общем виде, не вдаваясь в физический смысл искомой функции и коэффициентов уравнения.

Для нахождения этого решения необходимо сначала найти корни характеристического уравнения (квадратного уравнения с коэффициентами нашего дифференциального уравнения, где вместо степени производной искомой функции берётся степень некоторой переменной λ)

$$a\lambda^2 + b\lambda + c = 0,$$

$$D = b^2 - 4ac,$$

$$\lambda_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{D}}{2a}.$$

Тогда общее решение нашего дифференциального уравнения будет иметь вид:

$$y = C_1 e^{\lambda_1 x} + C_2 e^{\lambda_2 x}.$$

Для описания колебательных процессов нас будет интересовать случай с комплексными корнями этого уравнения:

$$D < 0 \Rightarrow \lambda_{1,2} = \frac{-b \pm i\sqrt{D'}}{2a}, \quad D' = -D.$$

Также учтём соотношение между коэффициентами дифференциального и характеристического уравнения (мы учли тот факт, что при построении уравнения мы приняли за единицу коэффициент при старшей производной):

$$a \rightarrow 1, b \rightarrow a_1, c \rightarrow a_0.$$

Тогда:

$$D = b^2 - 4ac = a_1^2 - 4a_0,$$

$$D' = -D = 4a_0 - a_1^2.$$

Корни будут иметь вид:

$$\lambda_{1,2} = \frac{-b \pm i\sqrt{D'}}{2a} = \frac{-a_1 \pm i\sqrt{4a_0 - a_1^2}}{2} = -\frac{1}{2}a_1 \pm i\sqrt{a_0 - \frac{a_1^2}{4}}.$$

Причём обратим внимание, что корни в этом случае будут комплексно сопряжённые числа.

Само общее решение запишется в следующем виде:

$$y = C_1 e^{\left(-\frac{1}{2}a_1 + i\sqrt{a_0 - \frac{a_1^2}{4}}\right)x} + C_2 e^{\left(-\frac{1}{2}a_1 - i\sqrt{a_0 - \frac{a_1^2}{4}}\right)x}.$$

Учитывая, что действительная часть у обоих корней характеристического уравнения $(\lambda_{1,2})$ будет одна и та же, можем сделать следующие преобразования:

$$y = C_1 e^{-\frac{1}{2}a_1 x + i\sqrt{a_0 - \frac{a_1^2}{4}}x} + C_2 e^{-\frac{1}{2}a_1 x - i\sqrt{a_0 - \frac{a_1^2}{4}}x},$$

$$y = C_1 e^{-\frac{1}{2}a_1 x} e^{i\sqrt{a_0 - \frac{a_1^2}{4}}x} + C_2 e^{-\frac{1}{2}a_1 x} e^{-i\sqrt{a_0 - \frac{a_1^2}{4}}x},$$

$$y = e^{-\frac{1}{2}a_1 x} \left(C_1 e^{i\sqrt{a_0 - \frac{a_1^2}{4}}x} + C_2 e^{-i\sqrt{a_0 - \frac{a_1^2}{4}}x} \right).$$

Тогда по формуле Эйлера имеем:

$$y = e^{-\frac{1}{2}a_1 x} \left(C_1 \left(\underbrace{\cos\left(\sqrt{a_0 - \frac{a_1^2}{4}}x\right) + i\sin\left(\sqrt{a_0 - \frac{a_1^2}{4}}x\right)}_{e^{i\sqrt{a_0 - \frac{a_1^2}{4}}x}} \right) + C_2 \left(\underbrace{\cos\sqrt{a_0 - \frac{a_1^2}{4}}x - i\sin\sqrt{a_0 - \frac{a_1^2}{4}}x}_{e^{-i\sqrt{a_0 - \frac{a_1^2}{4}}x}} \right) \right),$$

$$y = e^{-\frac{1}{2}a_1 x} \left(C_1 \cos\left(\sqrt{a_0 - \frac{a_1^2}{4}}x\right) + iC_1 \sin\left(\sqrt{a_0 - \frac{a_1^2}{4}}x\right) + C_2 \cos\left(\sqrt{a_0 - \frac{a_1^2}{4}}x\right) - iC_2 \sin\left(\sqrt{a_0 - \frac{a_1^2}{4}}x\right) \right).$$

В курсе математики отдельно доказывается, что, если дифференциальное уравнение будет иметь комплексный корень, то и действительная и мнимая его части независимо будут являться решениями этого уравнения. Выделим действительную и мнимую части:

$$\operatorname{Re} y \Rightarrow y_1 = e^{-\frac{1}{2}a_1x} \left(C_1 \cos \left(\sqrt{a_0 - \frac{a_1^2}{4}}x \right) + C_2 \sin \left(\sqrt{a_0 - \frac{a_1^2}{4}}x \right) \right) \Rightarrow$$

$$y_1 = e^{-\frac{1}{2}a_1x} \underbrace{(C_1 + C_2)}_{C'_1} \cos \left(\sqrt{a_0 - \frac{a_1^2}{4}}x \right),$$

$$y_1 = e^{-\frac{1}{2}a_1x} C'_1 \cos \left(\sqrt{a_0 - \frac{a_1^2}{4}}x \right).$$

$$\operatorname{Im} y \Rightarrow y_2 = e^{-\frac{1}{2}a_1x} \left(C_1 \sin \left(\sqrt{a_0 - \frac{a_1^2}{4}}x \right) - C_2 \cos \left(\sqrt{a_0 - \frac{a_1^2}{4}}x \right) \right),$$

$$y_2 = e^{-\frac{1}{2}a_1x} \underbrace{(C_1 - C_2)}_{C'_2} \sin \left(\sqrt{a_0 - \frac{a_1^2}{4}}x \right),$$

$$y_2 = e^{-\frac{1}{2}a_1x} C'_2 \sin \left(\sqrt{a_0 - \frac{a_1^2}{4}}x \right).$$

Рассмотрим общее решение в виде:

$$y = y_1 + y_2$$

$$y = e^{-\frac{1}{2}a_1x} C'_1 \cos \left(\sqrt{a_0 - \frac{a_1^2}{4}}x \right) + e^{-\frac{1}{2}a_1x} C'_2 \sin \left(\sqrt{a_0 - \frac{a_1^2}{4}}x \right).$$

Причём, обе части этого решения (функции позади констант интегрирования) будут линейно независимы:

$$y(x) = 0 \Leftrightarrow (y_1(x) = 0) \wedge (y_2(x) = 0).$$

А это значит, что ниже приведённое решение есть общее решение нашего дифференциального уравнения:

$$y = e^{-\frac{1}{2}a_1x} \left(C'_1 \cos \left(\sqrt{a_0 - \frac{a_1^2}{4}}x \right) + C'_2 \sin \left(\sqrt{a_0 - \frac{a_1^2}{4}}x \right) \right).$$

Теперь применим тригонометрическое соотношение

$$a \cos \alpha + b \sin \alpha = \sqrt{a^2 + b^2} \cos \left(\alpha + \operatorname{arctg} \frac{b}{a} \right),$$

получим:

$$y = e^{-\frac{1}{2}a_1 x} \underbrace{\sqrt{C_1'^2 + C_2'^2}}_{C_1''} \cos \left(\sqrt{a_0 - \frac{a_1^2}{4}} x - \frac{C_2'}{C_1'} \right),$$

$$y = C_1'' e^{-\frac{1}{2}a_1 x} \cos \left(\sqrt{a_0 - \frac{a_1^2}{4}} x + C_2'' \right).$$

Заменяя константы интегрирования на уже привычные нам величины, получим:

$$C_1'' \rightarrow A_0, C_2'' \rightarrow \varphi_0,$$

$$y = A_0 e^{-\frac{1}{2}a_1 x} \cos \left(\sqrt{a_0 - \frac{a_1^2}{4}} x + \varphi_0 \right).$$

Конкретный вид решений дифференциальных уравнений для механических и электрических колебаний будет иметь следующий вид (с учётом конкретного вида искомой функции и значения коэффициентов).

Для механических колебаний:

$$\frac{d^2 x}{dt^2} + 2\beta \frac{dx}{dt} + \omega_0 x = 0,$$

где

$$y \rightarrow x, x \rightarrow t, a_1 \rightarrow 2\beta, a_0 \rightarrow \omega_0^2.$$

Тогда:

$$x = A_0 e^{-\frac{1}{2} 2\beta t} \cos \left(\sqrt{\omega_0^2 - \frac{4\beta^2}{4}} \cdot t + \varphi_0 \right) = A_0 e^{-\beta t} \cos \left(\sqrt{\omega_0^2 - \beta^2} t + \varphi_0 \right),$$

$$x = A_0 e^{-\beta t} \cos \left(\sqrt{\omega_0^2 - \beta^2} \cdot t + \varphi_0 \right).$$

Для электрических колебаний:

$$\frac{d^2 q}{dt^2} + 2\beta \frac{dq}{dt} + \omega_0 q = 0,$$

где

$$y \rightarrow q, x \rightarrow t, a_1 \rightarrow 2\beta, a_0 \rightarrow \omega_0^2.$$

Тогда:

$$q = A_0 e^{-\beta t} \cos\left(\sqrt{\omega_0^2 - \beta^2} \cdot t + \varphi_0\right).$$

Решение неоднородного линейного дифференциального уравнения второго порядка – есть сумма общего решения однородного соответствующего однородного дифференциального уравнения (принимая правую часть за ноль) и одного (произвольного) частного решения данного неоднородного дифференциального уравнения. Докажем этот факт.

Пусть $y_0(x)$ – решение однородного дифференциального уравнения, соответствующего данному неоднородному уравнению:

$$\forall y_0(x): \frac{d^2 y_0}{dx^2} + a_1 \frac{dy_0}{dx} + a_0 y_0 = 0.$$

А $y_1(x)$ – некоторое частное решение данного неоднородного уравнения:

$$y_1(x): \frac{d^2 y_1}{dx^2} + a_1 \frac{dy_1}{dx} + a_0 y_1 = \Psi(x).$$

Покажем, что произвольное (общее) решение данного неоднородного уравнения $y_2(x)$ можно выразить, как сумму первых двух:

$$\begin{aligned} y_2(x): \frac{d^2 y_2}{dx^2} + a_1 \frac{dy_2}{dx} + a_0 y_2 = \Psi(x) &\Rightarrow \\ &\Rightarrow y_2(x) = y_1(x) + y_0(x). \end{aligned}$$

Так как $y_2(x)$ – решение нашего уравнения, имеем:

$$\frac{d^2 y_2}{dx^2} + a_1 \frac{dy_2}{dx} + a_0 y_2 = \Psi(x).$$

Подставим в эту формулу выражение $y_2(x)$ через $y_0(x)$ и $y_1(x)$:

$$\frac{d^2 (y_1 + y_0)}{dx^2} + a_1 \frac{d(y_1 + y_0)}{dx} + a_0 (y_1 + y_0) = \Psi(x).$$

Преобразуем (производная суммы есть сумма производных...):

$$\frac{d^2 y_1}{dx^2} + \frac{d^2 y_0}{dx^2} + a_1 \frac{dy_1}{dx} + a_1 \frac{dy_0}{dx} + a_0 y_1 + a_0 y_0 = \Psi(x).$$

Но первая часть этого уравнения есть подстановка в уравнение частного решение нашего неоднородного уравнения, и, следовательно приведённая комбинация есть правая часть нашего уравнения:

$$\underbrace{\frac{d^2 y_1}{dx^2} + a_1 \frac{dy_1}{dx} + a_0 y_1}_{\Psi(x)} + \frac{d^2 y_0}{dx^2} + a_1 \frac{dy_0}{dx} + a_0 y_0 = \Psi(x).$$

Тогда:

$$\cancel{\Psi(x)} + \frac{d^2 y_0}{dx^2} + a_1 \frac{dy_0}{dx} + a_0 y_0 = \cancel{\Psi(x)}.$$

Получили истинное утверждение:

$$\frac{d^2 y_0}{dx^2} + a_1 \frac{dy_0}{dx} + a_0 y_0 = 0.$$

Данные рассуждения можно провести и в обратном порядке (любая функция вида $y_0(x) + y_1(x)$ есть решение...).

Частное решение неоднородного уравнения:

$$\frac{d^2 y}{dx^2} + 2\beta \frac{dy}{dx} + \omega_0^2 y = b \cos(\omega \cdot x)$$

будем искать в виде:

$$y = A \cos(\omega \cdot x + \varphi_0).$$

По крайней мере, у нас есть некоторая априорная уверенность, что оно должно нам подойти. И наша задача лишь в том, чтобы найти неизвестные нам параметры – амплитуду и сдвиг фазы.

Найдём первую и вторую производные нашего решения, чтобы подставить их в дифференциальное уравнение:

$$\frac{dy}{dx} = -A\omega \sin(\omega \cdot x + \varphi_0),$$

$$\frac{d^2 y}{dx^2} = -A\omega^2 \cos(\omega \cdot x + \varphi_0).$$

После подстановки получим:

$$-A\omega^2 \cos(\omega \cdot x + \varphi_0) - 2\beta \cdot A\omega \sin(\omega \cdot x + \varphi_0) + \omega_0^2 \cdot A \cos(\omega \cdot x + \varphi_0) = b \cos(\omega \cdot x).$$

Немного преобразуем (сгруппируем косинусы с одинаковым значением аргумента):

$$(\omega_0^2 - \omega^2) \cos(\omega \cdot x + \varphi_0) - 2\beta\omega \sin(\omega \cdot x + \varphi_0) = \frac{b}{A} \cos(\omega \cdot x).$$

Применим тригонометрическое соотношение

$$a \cos \alpha - b \sin \alpha = \sqrt{a^2 + b^2} \cos \left(\alpha + \operatorname{arctg} \frac{b}{a} \right),$$

получим:

$$\sqrt{(\omega_0^2 - \omega^2)^2 + 4\beta^2 \omega^2} \cdot \cos \left(\omega \cdot x + \varphi_0 + \operatorname{arctg} \frac{2\beta\omega}{\omega_0^2 - \omega^2} \right) = \frac{b}{A} \cos(\omega \cdot x).$$

Очевидно, что данное утверждение будет верно, если независимо будут равны коэффициенты перед *косинусом* и аргумент функции *косинус*:

$$\begin{cases} \sqrt{(\omega_0^2 - \omega^2)^2 + 4\beta^2 \omega^2} = \frac{b}{A} \\ \omega \cdot x + \varphi_0 + \operatorname{arctg} \frac{2\beta\omega}{\omega_0^2 - \omega^2} = \omega \cdot x \end{cases}$$

Тогда окончательно получаем:

$$\begin{cases} A = \frac{b}{\sqrt{(\omega_0^2 - \omega^2)^2 + 4\beta^2 \omega^2}} \\ \varphi_0 = -\operatorname{arctg} \frac{2\beta\omega}{\omega_0^2 - \omega^2} \end{cases}.$$

Это и есть искомый результат.

Вернуться к [незатухающим колебаниям](#).

Вернуться к [вынужденным колебаниям](#).

Литература

Основная литература

1.
 - a. Савельев И.В. Курс общей физики. В 5-ти т. Том 3. Колебания и волны — М,СПб: Лань, 2011.
 - b. [Савельев И.В. Курс общей физики. В 3-х т. Том 1. Механика. Колебания и волны. Молекулярная физика — М,СПб: Лань, ~2011](#)
2. [Иродов И.Е. Волновые процессы. Основные законы. — М, СПб: Физматлит, Невский диалект, 2014.](#)

Дополнительная литература

3. [Сивухин Д.В. Общий курс физики. Учебное пособие в 5-и томах. Т. I.. — М: ..., 2014.](#)
4. [Сивухин Д.В. Общий курс физики. Учебное пособие в 5-и томах. Т. III.. — М: ..., 2014.](#)

Осташев Владимир Борисович

Учёная степень: кандидат технических наук

Учёное звание: доцент

Должность: доцент кафедры общей физики СПбГТИ(ТУ)

Личный сайт:

<http://ostashevvb.spb.ru>



Вкладки:

«*В помощь детям*» – конспекты лекций, методические материалы,
вопросы к экзамену

«*О себе*» – контактная информация

[Вернуться к содержанию...](#)

Кафедра общей физики
Колебания и волны –
Конспект лекций

Владимир Борисович Осташев

Отпечатано с оригинал-макета Формат 60×90 $\frac{1}{16}$

Печатных листов __,__ Тираж __ экз.

Государственное образовательное учреждение высшего
профессионального образования
Санкт-Петербургский государственный технологический институт
(технический университет)
(СПбГТИ (ТУ))

190013, Санкт-Петербург, Московский пр., 26
Отпечатано в типографии _____, т. +7- _____

цена 0 руб. 00 коп.